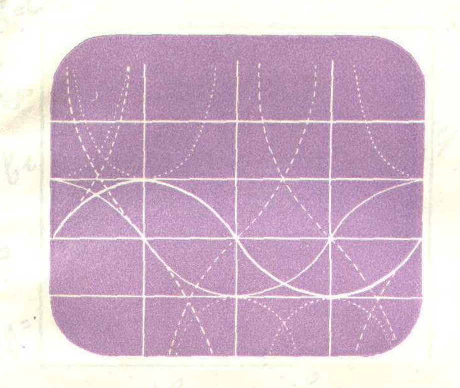


单墫

覆盖

上海教育出版社

覆　盖

单墫

上海教育出版社

覆　　盖

单　　墫

上海教育出版社出版
（上海永福路 123 号）

新华书店上海发行所发行　江苏南漕印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 3.75　字数 79,000
1983 年 7 月第 1 版　1983 年 7 月第 1 次印刷
印数 1—33,000 本

统一书号：7150·2937　　定价：0.32 元

前　言

拿一张纸,剪出两个大小不等的圆,那么大圆一定能覆盖小圆.也就是说,能把大圆放在小圆上面,将小圆完全遮盖住.但是,一个小圆显然不能覆盖大圆,就是两个小圆也不能覆盖一个大圆. 我们必须有三个小圆才可能覆盖一个大圆,而且这三个小圆的半径还不能太小. 如果小圆的半径都是大圆半径的一半,那么六个这样的小圆还不能覆盖一个大圆,而要七个小圆才能覆盖一个大圆.

在一块凸平面形的地基上造起来的大厦,我们只要有四个方向的平行光线,就可以在晚间把大厦的各个侧面照亮.要是大厦的横截面不是平行四边形,那就只要三个方向的光线就够了.

古城堡里有一块任意形状的广场,设立卫兵哨位时希望他能从哨位上看到广场的每一个角落,你知道可以设哨的区域是什么形状?本书将会告诉你,这个区域是一个凸形.

你觉得这些事有趣吗?你过去注意到这些事实吗?这些事似乎都比较直观,但从数学上加以证明就不象想象得那么容易了. 这本小册子将要围绕着这类问题引出许多数学知识,主题将是“覆盖”. 这些知识大体上属于“组合几何学”的范围,它们是中学生能够理解的. 它的许多问题也是中学生能够解决的. 通过对一些著名问题的剖析和精巧的典型方法的介绍,我们希望能够使读者的能力得到提高,并了解一些有用的数学知识.

目　　录

前言
§1　覆盖 ……………………………………………………1
§2　嵌入 ……………………………………………………19
§3　一些例题 ………………………………………………34
§4　凸集 ……………………………………………………48
§5　密度 ……………………………………………………61
§6　海莱(Helly)定理及其应用 ……………………………72
习题……………………………………………………………80
习题解答概要…………………………………………………90

§1 覆　　盖

在前言中已经提到圆的覆盖问题．圆是最简单而又用得最多的图形．为了明确起见，在本书中，我们把到定点 O 的距离等于定长 r 的点的集合称为*圆周*．把圆周及其内部，也就是到定点 O 的距离 $\leqslant r$ 的点的集合称为*圆*，并记为 $\odot(O, r)$ 或 $\odot O$，O 称为*圆心*，r 称为*半径*．同样地，本书中说到的三角形、多边形、椭圆，也都是同时包括了这些图形的边界及其内部的，而不单是指围成这些图形的边界．

在本书中要遇到的图形是多种多样的，它们都是点的集合（点集）．

现在我们给出覆盖的严格的定义．

定义 1　设 M、N 是两个点集，如果点集 M 的每一个点都属于点集 N（采用集合论的符号写，就是 $M\subset N$），那么我们就说点集 N *覆盖*（*包含*）点集 M．如果点集 M 的点不全属于点集 N，那么我们就说点集 N *不覆盖*（*不包含*）点集 M．

点集 N（不）覆盖点集 M，也常常说成点集 M（不）被点集 N 覆盖．

我们举两个简单的例子．

如果点集 M 由一个点 O 组成，点集 N 为 $\odot(O, r)$．圆显然覆盖自己的圆心，所以点集 N 覆盖点集 M．

如果点集 M 为 $\odot(O, r_1)$，点集 N 为 $\odot(O, r_2)$，$r_2\geqslant r_1$，即点集 M、N 是同心圆，那么点集 N 覆盖点集 M．这是因为点集 M 的任一点 A 到圆心 O 的距离 $OA\leqslant r_1$，但是 $r_1\leqslant r_2$，所

以 $OA \leqslant r_2$. 这就是说 A 属于点集 N(图 1.1).

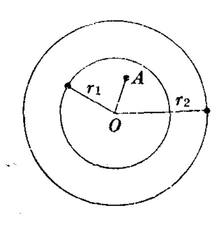


图 1.1

如果 M 覆盖 N, N 又覆盖 M, 那么 M、N 就是完全相同的图形了. 这一点从直观上看很显然, 它和集合论中"$M \subset N$ 及 $N \subset M \Leftrightarrow M = N$"是一回事.

在本书中, 更常用的是下面的定义 2. 请注意它与定义 1 不同的地方.

定义 2 M、N 都是平面点集, 如果能经过一个适当的运动, 使得点集 N 成为点集 N_1, 而 N_1 覆盖点集 M, 那么我们就说点集 N *能覆盖*点集 M. 如果不存在上述的运动, 那么我们就说点集 N *不能覆盖*点集 M.

这里所说的运动是指平移(平行移动)、绕一个定点的旋转、轴对称(反射)或者它们的有限多次的组合. 显然一个点集 N 经过运动后得到的点集 N_1 与原来的点集 N 除了位置不同外, 是完全一样的(即图形 N 与 N_1 合同).

点集 N 能(或不能)覆盖点集 M, 也常常说成点集 M 能(或不能)被点集 N 覆盖.

"能覆盖"与"覆盖"不是完全相同的概念. 但是为了简便起见, 在不致混淆的时候, 我们对定义 2 中的点集 N_1 与 N 不加严格区分, 并且常常将点集 N_1 也记作 N.

下面的例 1 是在前言中已经提过的问题.

[例 1] 已知 $M_1 = \odot(O_1, r_1)$, $M_2 = \odot(O_2, r_2)(r_2 > r_1)$, 是两个大小不等的圆, 证明圆 M_2 能覆盖圆 M_1, 而圆 M_1 不能覆盖 M_2.

解 平移圆 M_2, 使得圆心 O_2 与 O_1 重合, 则圆 $M_2' = \odot(O_1, r_2)$ 与圆 $M_1 = \odot(O_1, r_1)$ 是同心圆. 因为 $r_1 < r_2$, 所以

圆 M_2' 覆盖圆 M_1，也就是圆 M_2 能覆盖圆 M_1.

其实，要证明圆 M_2 能覆盖圆 M_1，并不一定非要使圆心 O_2 与 O_1 重合不可．只要经过平移使点 O_2 与 O_1 之间的距离 $\leqslant r_2-r_1$ 就可以了．因为这时对于圆 M_1 的任一点 A，有 $O_1A\leqslant r_1$，从而(参见图 1.2)

$$O_2A\leqslant O_1A+O_1O_2\leqslant r_1+(r_2-r_1)=r_2,$$

因此 A 一定属于 $\odot(O_2, r_2)$，即圆 M_2 能覆盖圆 M_1.

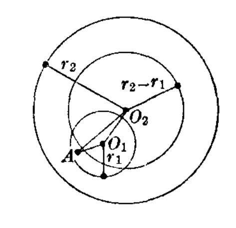


图 1.2

这实际上就是说，我们可以将圆 M_1 与圆 M_2 的半径都减去 r_1，使 M_1 收缩为一个点 O_1（我们称它为点圆 O_1），而 M_2 收缩为 $\odot(O_2,\ r_2-r_1)$，再由 $\odot(O_2,\ r_2-r_1)$ 显然覆盖点 O_1，导出原来的圆 M_2 能覆盖圆 M_1. 在覆盖问题中，这种收缩(或膨胀)是经常采用的一种方法，后面我们还会遇到.

现在来证明小的圆 M_1 不能覆盖大的圆 M_2. 虽然这个论断直观上很显然，但是证明却有点迂回.

第一种方法是比较两个圆的面积.

如果点集 N 能覆盖点集 M 时，那么由于 M 是 N 的子集，所以 N 的面积 $\geqslant M$ 的面积．但

$$\text{圆 } M_1 \text{ 的面积 } \pi r_1^2<\text{圆 } M_2 \text{ 的面积 } \pi r_2^2,$$

所以圆 M_1 不能覆盖圆 M_2.

为了简便起见，本书中有时将点集 M 的面积也记作 M，例如 $\odot O$、$\triangle ABC$ 或 $\square ABCD$ 的面积也记作 $\odot O$、$\triangle ABC$ 或 $\square ABCD$.

第二种方法是比较两个圆的直径.

为了今后的应用，我们先给出一般点集的直径的定义.

定义 3 把点集 M 中任意两点 A、B 的距离 AB 的最大值记为 d，即 $d=\max\{AB\}$. 如果 d 是一个有限数，那么称 d 是点集 M 的直径.

显然，当点集 M 为圆时，点集 M 的直径就是通常所说的圆的直径. 不难证明三角形的直径就是这个三角形的最长的边. 读者可以考虑一下弓形、扇形（或其他熟悉的图形）的直径是什么.

一个点集的直径不一定只有一条.

关于覆盖问题与直径的关系，有一个简单而实用的结论，即如果点集 N 能覆盖点集 M，那么由于 M 是 N 的子集，所以点集 M 的直径 $\leqslant$ 点集 N 的直径. 反过来，如果点集 M 的直径 $>$ 点集 N 的直径，那么 N 不能覆盖点集 M. 于是例 1 可有下面的解法：

因为上面所说的圆 $M_1=\odot(O_1, r_1)$ 的直径 $2r_1$ 小于圆 $M_2=\odot(O_2, r_2)$ 的直径 $2r_2$，所以圆 M_1 不能覆盖圆 M_2.

比较某种与集合相关联的量（如面积、直径等），从而导出一个集合不能覆盖另一集合，这也是覆盖问题中常常用到的一种方法.

下面的例 2 到例 4，是用圆覆盖其他点集的问题.

[例 2] 已知 $\triangle ABC$，求出覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的圆.

解 显然 $\triangle ABC$ 的外接圆覆盖 $\triangle ABC$，粗看似乎这个圆就是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的圆. 其实这个结论并不完全正确.

我们分三种情况来讨论.

(1) $\triangle ABC$ 是钝角三角形

以最长边 $BC=a$ 为直径作 $\odot O$. 对属于 $\triangle ABC$ 的任一点 A'，因为 $\angle BA'C \geqslant \angle BAC > 90°$，所以 A' 在 $\odot O$ 内，即

$\odot O$ 覆盖 $\triangle ABC$ (图 1.3(1)).

因为任意一个覆盖 $\triangle ABC$ 的圆，它的直径不小于 $\triangle ABC$ 的直径即 $BC=a$，所以 $\odot O$ 就是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的圆.

在这一情况下，$\odot O$ 比 $\triangle ABC$ 的外接圆小.因为 $\angle BAC>90°$，所以 BC (即 $\odot O$ 的直径)不会是外接圆的直径，从而小于外接圆的直径.

(2) $\triangle ABC$ 是直角三角形

与(1)类似，以斜边 $BC=a$ 为直径的圆是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的覆盖圆. 在这种情况下最小的覆盖圆就是 $\triangle ABC$ 的外接圆(图 1.3(2)).

(3) $\triangle ABC$ 是锐角三角形

这时 $\triangle ABC$ 的外接圆也是覆盖 $\triangle ABC$ 的最小的圆. 这只要证明其他任何覆盖 $\triangle ABC$ 的圆，都大于等于 $\triangle ABC$ 的外接圆就行了. 因为如果 $\odot O$ 覆盖 $\triangle ABC$，将 $\triangle ABC$ 在 $\odot O$ 中适当地运动，总可以使得三角形有两个顶点，比如说 B、C，在圆周上.详细些说，我们先在 $\odot O$ 中平移 $\triangle ABC$，使得一个顶点 B 被移到圆周上，然后再在 $\odot O$ 中将 $\triangle ABC$ 绕点 B 旋转，使得另一个顶点 C 也落到圆周上. 由于始终是在 $\odot O$ 中运动，所以这时第三个顶点 A 在 $\odot O$ 内或圆周上(图

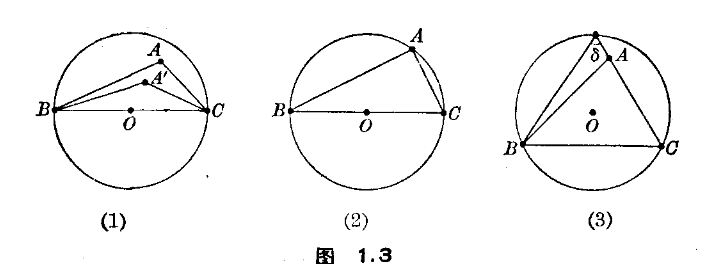


图 1.3

1.3(3)). $\widehat{BC}$(劣弧)所对圆周角 $\delta \leqslant \angle BAC < 90°$,因此

$\odot O$ 的直径 $= \dfrac{BC}{\sin\delta} \geqslant \dfrac{BC}{\sin\angle BAC} = \triangle ABC$ 的外接圆的直径.

定义 4 如果点集 M 能被一个圆覆盖,那么我们就说 M 是有界点集.

圆、三角形、多边形、椭圆都是有界点集,抛物线不是有界点集.

一般地,一条(不自身相交的)闭曲线及其内部是一个有界点集,我们把它叫做有界闭集.

定义 5 设点集 M 是有界点集. 覆盖 M 的圆中最小的一个叫做 M 的最小覆盖圆. 最小覆盖圆的半径叫做点集 M 的覆盖半径.

设 $\triangle ABC$ 的最大边 $BC = a$, 那么 $\angle BAC \geqslant 60°$, 所以综合例 2 的(1)、(2)、(3) 可知 $\triangle ABC$ 的覆盖半径 ρ 满足

$$\frac{a}{2} \leqslant \rho \leqslant \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}},$$

左边的等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为钝角或直角三角形时成立;右边的等号当且仅当 $\triangle ABC$ 为正三角形时成立. 上述右边不等式的详细推导留给读者. 这个不等式给出了三角形的覆盖半径的上下界.

n 边形的最小覆盖圆与覆盖半径将在 §3 中讨论. 对于正 n 边形,问题是很简单的,我们现在就可以解决它.

[例 3] 设正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的边长为 a, 求它的覆盖半径.

解 我们证明正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆 $\odot O$ 就是它的最小覆盖圆. 证明 $\odot O$ 是最小覆盖圆的通常步骤是: (1) $\odot O$ 是覆盖圆. (2) 任何覆盖圆的半径 $\geqslant \odot O$ 的半径.

我们就用这样的方法来证本题.

显然 $\odot O$ 覆盖这个 n 边形.

在 n 为偶数 $2m$ 时, A_1A_{m+1} 是 $\odot O$ 的直径($\overset{\frown}{A_1A_{m+1}}$ 是半个圆周), 因此每个覆盖正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的圆的直径 $\geqslant A_1A_{m+1}=\odot O$ 的直径, 即 $\odot O$ 是最小覆盖圆.

在 n 为奇数 $2m-1$ 时, 易知 $\triangle A_1A_mA_{m+1}$ 是等腰三角形, 顶角为锐角: $\angle A_mA_1A_{m+1}=\dfrac{\pi}{2m-1}$, 所以 $\triangle A_1A_mA_{m+1}$ 是锐角三角形, 根据例 2, 它的最小覆盖圆是 $\odot O$, 因而正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的最小覆盖圆为 $\odot O$.

总之, 正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的外接圆 $\odot O$ 就是最小覆盖圆. 因此覆盖半径就是 $\odot O$ 的半径 r, 易知

$$r=\frac{a}{2\sin\dfrac{\pi}{n}}.$$

[例 4] 设点集 M 由两个互不包含的圆 $\odot(O_1, r_1)$ 及 $\odot(O_2, r_2)$ 组成(用集合论的符号可以写成 $M=\odot(O_1, r_1)\cup\odot(O_2, r_2)$), 求 M 的覆盖半径.

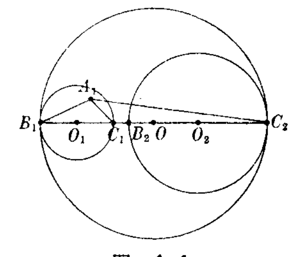


图 1.4

解 设直线 O_1O_2 交 $\odot O_1$ 于 B_1、C_1, 交 $\odot O_2$ 于 B_2、C_2, 并且 O_1、C_1、B_2、O_2 都在线段 B_1C_2 上(图 1.4). 以 B_1C_2 为直径作 $\odot O$, 我们证明这个圆就是最小覆盖圆, 覆盖半径 $r=\dfrac{1}{2}B_1C_2$.

对于 $\odot O_1$ 中任一点 A_1, 连结 A_1B_1、A_1C_1、A_1C_2. 因为 B_1C_1 是 $\odot O_1$ 的直径, 所以 $\angle B_1A_1C_1\geqslant 90^\circ$, 从而

$$\angle B_1A_1C_2 \geqslant \angle B_1A_1C_1 \geqslant 90^\circ,$$

A_1在$\odot O$中. 于是$\odot O$覆盖$\odot O_1$，同样$\odot O$覆盖$\odot O_2$，因此$\odot O$覆盖M.

任何一个覆盖M的圆至少都要覆盖点B_1、C_2，因而它的直径$\geqslant B_1C_2$，所以$\odot O$是最小覆盖圆.

容易看出在$\odot O_1$与$\odot O_2$外离、外切或相交时，r大于、等于或小于r_1+r_2.

我们也可以考虑用三角形或多边形来覆盖圆.

[例5] 证明在能覆盖$\odot(O, r)$的正n边形中，以$\odot(O, r)$的外切正n边形的边长为最小.

解 设正n边形$A_1A_2\cdots A_n$覆盖$\odot(O,r)$，则O到这n边形的每一条边的距离$\geqslant r$. 将这n边形的每边向内平移直至与$\odot(O, r)$相切(即与O点的距离为r)，这样截得一个n边形$A_1'A_2'\cdots A_n'$ (图1.5). 我们先证明$A_1'A_2'\cdots A_n'$也是一个正n边形.

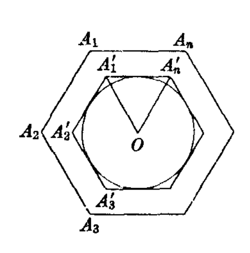


图 1.5

因为两个n边形的对应边平行，所以对应角相等. 由于正n边形$A_1A_2\cdots A_n$的角全相等，所以n边形$A_1'A_2'\cdots A_n'$的角也全相等. 又因为n边形$A_1'A_2'\cdots A_n'$是$\odot(O, r)$的外切多边形，所以$\angle OA_1'A_n'=\angle OA_1'A_2'=\angle OA_2'A_1'=\angle OA_n'A_1'=\frac{1}{2}\angle A_n'A_1'A_2'$，从而$\triangle OA_1'A_2' \cong \triangle OA_1'A_n'$，$A_n'A_1'=A_1'A_2'$. 同理可知$A_1'A_2'=A_2'A_3'=\cdots=A_{n-1}'A_n'$. 因此$n$边形$A_1'A_2'\cdots A_n'$是$\odot(O, r)$的外切正$n$边形.

正n边形$A_1'A_2'\cdots A_n'$被正n边形$A_1A_2\cdots A_n$覆盖，因而它

的面积不大于正 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的面积. 从而它的边长也不大于正 n 边形的边长. 证毕.

我们可以证明比例5更强的结论, 即在全体覆盖 $\odot(O,r)$ 的 n 边形(不一定是正 n 边形)中, 以这圆的外切正 n 边形的面积为最小.

[例6]* 设 n 边形 M 覆盖 $\odot(O, r)$, M_n 为 $\odot(O, r)$ 的外切正 n 边形, 则面积 $M \geqslant M_n$.

解 我们把证明分两段, 这里先假定 M 是一个凸多边形. 采用例5中的方法将 M 的各边向内平移, 得到一个 $\odot(O, r)$ 的外切多边形 M', M' 是凸的, 且面积 $M' \leqslant M$.

设 $\odot(O, r')$ 是正 n 边形 M_n 的外接圆, M' 的边截 $\odot(O, r')$ 得到 n 个弓形 S_1、S_2、$\cdots$、S_n (图1.6). 由于 M' 是 $\odot(O, r)$ 的外切多边形, O 到 M' 的各边的距离都等于 r, 即在 $\odot(O, r')$ 中, 弓形 S_1、S_2、$\cdots$、S_n 的弦与圆心 O 的距离都等于 r, 从而这些弓形的面积相等. 因此多边形 M' 与 $\odot(O, r')$ 的公共部分 $M' \cap \odot(O, r')$ 的面积满足:

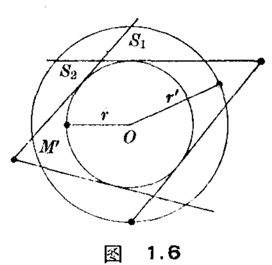


图 1.6

$$M' \cap \odot(O, r') \geqslant \odot(O, r') - (S_1 + S_2 + \cdots + S_n)$$
$$= \odot(O, r') - nS_1.$$

而 M_n 就等于 $\odot(O, r') - nS_1$, 所以 $M' \geqslant M_n$, 更有 $M \geqslant M_n$.

为了对不是凸多边形的情况进行论证, 先引进一个推论.

推论 $\odot(O, r)$ 的外切正 n 边形 M_n 的面积 M_n 是 n 的减函数, 即 $M_{n+1} \leqslant M_n$.

证明 正 n 边形 M_n 可以看成是 $n+1$ 边形, 其中有两个

打 * 号的例题难度较大, 初次阅读时可以略去

顶点重合. 因此,根据上面得到的结果 $M_{n+1} \leqslant M_n$.

现在我们继续证明在 M 不是凸多边形时, 仍然有 $M \geqslant M_n$.

首先证明对于凹的多边形 M, 都可以找到一个多边形 M'', M'' 的边数比 M 少, 并且 $M \supset M'' \supset \odot(O, r)$. 这是因为每个凹多边形 M 都有一个内角 $\alpha > 180°$(图 1.7), 反向延长它的边 A_2A_1, 设与 M 的边相交于 A_3'(如果交点不止一个,取与 A_2 最近的一个),则 A_1A_3' 把 M 分成两个多边形,每一个的边数都比 M 少. 如果其中有一个覆盖 $\odot(O, r)$, 那么它就是所要找的多边形 M''. 如果不是这样,那么直线 A_1A_2 与 $\odot(O, r)$相交. 反向延长 A_2A_3,在直线 A_2A_3 与 $\odot(O, r)$ 不相交时,同样能找到所需要的多边形 M''. 如果直线 A_1A_2、A_2A_3 均与 $\odot(O, r)$相交(图 1.8). 连 OA_2,过 A_2 作 OA_2 的垂线. 由于 A_2 不在 $\odot(O, r)$ 内部,所以这垂线不与 $\odot(O,r)$ 相交,因而不在角 $\beta(\beta=360°-\alpha)$ 及其对顶角内, 从而与 M 的边相交于 A_1'、A_3', A_1'、A_3' 分别在 A_2 的两侧(如果某一侧交点的个数不只一个,取与 A_2 最近的一个). 线段 $A_1'A_3'$ 将多边形 M 分为两个多边形, 其中覆盖 $\odot(O, r)$的那一个就是所要找的多边形 M''.

如果把多边形 M 当作一块蛋糕, 中间涂了一块形状为

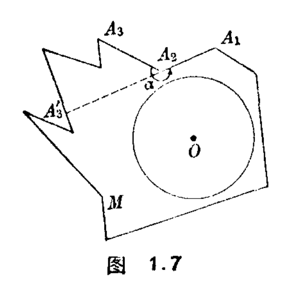


图 1.7

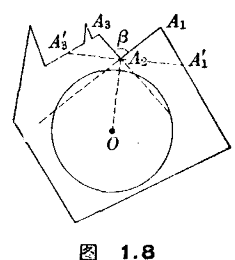


图 1.8

$\odot(O, r)$的奶油，那么刚才所说的结论就是，对于凹的蛋糕，总可以用刀切去一块，使得蛋糕的边数减少，但不切到奶油.

采用上面的"切法"，使 M 的边数减少，得到多边形 M''. 如果 M'' 还是凹多边形，再继续切，如此下去，直到切出一个凸多边形(边数为三的多边形，即三角形，当然是凸多边形). 不妨假定这个凸多边形就是 M''，它的边数 $m<n$.

由于 M'' 是凸 m 边形，并且 M'' 覆盖 $\odot(O, r)$，所以面积 $M''\geqslant M_m$，这里 M_m 是 $\odot(O, r)$ 的外切正 m 边形的面积. 根据推论，$M_m>M_n$，所以 $M''>M_n$，更有 $M>M_n$. 证毕.

从上面的证明不难看出当且仅当 M 为 $\odot(O, r')$的内接正 n 边形(即$\odot(O, r)$ 的外切正 n 边形)时，$M=M_n$.

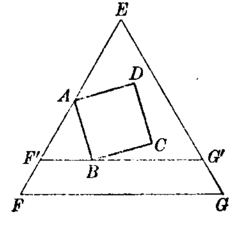


图 1.9

下面的两个例题是正三角形与正方形的覆盖问题.

[例 7] 一个边长为 a 的正三角形 EFG 覆盖一个边长为 1 的正方形 $ABCD$，求 a 的最小值.

解 可以假定 $\triangle EFG$ 的每一条边上至少有正方形 $ABCD$ 的一个顶点，否则就可以将这条边，不妨设为 FG(图 1.9)，向三角形内平移至 $F'G'$，使得它含有正方形 $ABCD$ 的一个顶点，从而得到了一个更小的正三角形 $EF'G'$.

这时有两种情况：

(1) 正方形 $ABCD$ 的四个顶点全在 $\triangle EFG$ 的边上(图 1.10).

这时 $a=ED+DF=1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

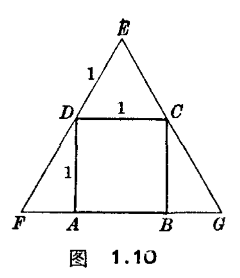


图 1.10

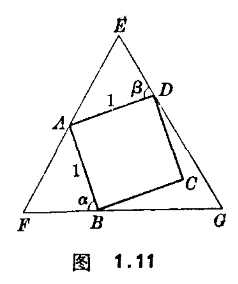


图 1.11

(2) 正方形 $ABCD$ 有一个顶点不在 $\triangle DEF$ 的边上(图 1.11). 这时,

$$a = AF + AE = \frac{\sin\alpha}{\sin 60^\circ} + \frac{\sin\beta}{\sin 60^\circ}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin\alpha + \sin\beta) = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

因为 $\alpha+\beta = 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - 90^\circ = 150^\circ$,

并且 $\alpha < 90^\circ$, $\beta < 90^\circ$, 所以,

$$\alpha > 60^\circ,\quad \beta > 60^\circ,\quad -30^\circ < \alpha-\beta < 30^\circ,$$

于是

$$a = \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{150^\circ}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} > \frac{4}{\sqrt{3}}\sin\frac{150^\circ}{2}\cos\frac{30^\circ}{2}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}(\sin 90^\circ + \sin 60^\circ) = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

综合(1)、(2)可知, 当且仅当 $\triangle EFG$ 如图 1.10 时, 边长最小, 最小边长为 $1+\frac{2}{\sqrt{3}}$.

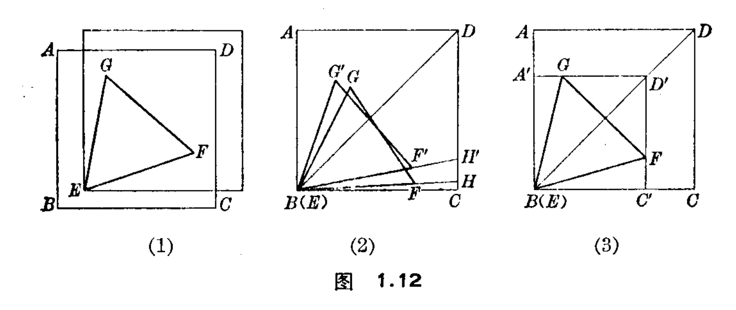
[例 8] 如果一个边长为 a 的正方形 $ABCD$ 能覆盖一个边长为 1 的正三角形 EFG, a 至少要多大?

解 我们首先分几步确定 $\triangle EFG$ 与正方形 $ABCD$ 的位置关系, 然后再求 a 的值.

(1) 经过平移可以假定正方形 $ABCD$ 有一个顶点与 $\triangle EFG$ 的顶点重合, 方法如下: 在 E、F、G 中设 E 为最左

边的点，F 为最右边的点．E、F 两点中必有一点为最上面或最下面的点．不妨设 E 为最下面的点．平移正方形 $ABCD$，使得 B 与 E 重合(图 1.12(1))，这时正方形 $ABCD$ 仍然覆盖 $\triangle EFG$.

(2) 设 B 与 E 重合．连 BD，由于 $\angle FBG=60°>\angle DBA=45°$，所以 F、G 不在 BD 的同一侧．如果 $\angle FBD\neq\angle DBG$，不妨假定 $\angle FBD>30°>\angle DBG$．将 $\triangle FBG$ 绕 B 点旋转至 $\triangle F'BG'$，使 $\angle F'BD=30°$(图 1.12(2)).



(1)　　(2)　　(3)

图 1.12

我们断言 F' 仍在 $\triangle BCD$ 内．为了证实这一点，设射线 BF、BF' 分别交 CD 于 H、H'，则由于 $\angle F'BC>\angle FBC$，$BH'>BH\geqslant BF=BF'$，从而点 F' 在线段 BH' 内部，因而在 $\triangle BCD$ 内.

G' 点与 F' 关于 BD 对称，所以 G' 也在正方形 $ABCD$ 内.

因此，我们可以假定 $\angle FBD=\angle DBG=30°$，不然的话，我们就用 $\triangle F'BG'$ 来代替 $\triangle FEG$ (或者说，保持 $\triangle EFG$ 不动，将正方形 $ABCD$ 绕 B 点依相反方向旋转，使得 $\angle FBD=30°$).

(3) 设 B 与 E 重合，$\angle FBD=\angle DBG=30°$．如果点 F 不在 CD 上，过 F 作 $C'D'\parallel CD$，过 G 作 $A'D'\parallel AD$，截得正方

形 $A'BC'D'$(图 1.12(3)). 这是一个比正方形 $ABCD$ 小的正方形，它仍然覆盖 $\triangle EFG$.

综合(1)、(2)、(3)，我们可以得出这样的结论：每一个覆盖 $\triangle EFG$ 的正方形都不比图 1.13 中的正方形 $ABCD$ 小. 因此，图中的正方形 $ABCD$ 的边长 a 是最小的.

要求出这时的边长 a 是不困难的. 由全等三角形，可得图 1.13 中 $\alpha=\beta=\frac{1}{2}(90^\circ-60^\circ)=15^\circ$，所以

$$a=\cos 15^\circ=\sqrt{\frac{1+\cos 30^\circ}{2}}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

例 8 及例 7 的方法值得注意. 通过这两个例题，我们看到在确定覆盖点集 M 的最小的正方形(或正三角形等其他图形)时，可以采用调整的方法，将每一个覆盖点集 M 的正方形(或正三角形等其他图形) N 换为比 N 小的、仍然覆盖 M 的正方形(或正三角形等其他图形) N'. 经过几次调整，最后得出若干种可能的位置，再在这些可能的位置中找出最小的. 如果经过调整，最后得出的是一个相同的正方形(或正三角形等其他图形)，那么这个正方形(或正三角形等其他图形)就是最小的.

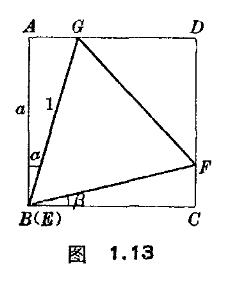


图 1.13

另一种常常见到的解法是假定在覆盖点集 M 的正方形(或正三角形等其他图形)中以 N 为最小，再讨论 N 所必须具有的性质(往往是用反证法：如果不具有这样的性质，那么就一定不是最小的)，从而确定 N 的位置. 这种方法常常能较快地得出结果，但严格说来，它预先假定了最小的存在，用到了连续性. 对于这一点，我们不作详细的讨论了.

最后，我们考虑用$n(>1)$个点集N_1、N_2、…、N_n来覆盖点集M的问题.

定义 6 已知点集N_1、N_2、…、N_n $(n>1)$ 及M. 如果$N_1\cup N_2\cup\cdots\cup N_n\supset M$或者每个点集$N_i(1\leqslant i\leqslant n)$各经过一个运动(不要求是同一个运动)后，得到的点集$N_i'(1\leqslant i\leqslant n)$满足$N_1'\cup N_2'\cup\cdots\cup N_n'\supset M$，那么就说点集$N_1$、$N_2$、…、$N_n$覆盖点集$M$或者$N_1$、$N_2$、…、$N_n$能覆盖点集$M$. 否则的话，就说$N_1$、$N_2$、…、$N_n$不覆盖点集$M$或者不能覆盖点集$M$.

为简便起见，我们对N_i'与N_i不加区别，并将N_i'写做N_i.

定义 6 中的n个点集也可以换为无穷多个点集.

[例 9] 以$\square ABCD$的边为直径向平行四边形内作四个半圆，证明这四个半圆一定覆盖整个的平行四边形.

解一 要证明这四个半圆覆盖整个平行四边形，只要证明$\square ABCD$的每一个点至少属于一个半圆就行了.

用反证法，假定$\square ABCD$的点I不属于四个半圆中的任何一个. 取$\square ABCD$的四边的中点E、F、G、H(图 1.14)，因为I不在以E为圆心，EB为半径的圆内，所以$IE>EB$，从而

$$\angle EIB<\angle EBI,$$

同理
$$\angle BIF<\angle IBF,$$

相加得
$$\angle EIF<\angle EBF,$$

同理

$$\angle FIG<\angle FCG,\ \angle GIH<\angle GDH,\ \angle HIE<\angle HAE,$$

四式相加得
$$360^\circ<360^\circ.$$

矛盾!

解二 与解一不同的是我们不从单个的“点”来考虑，而

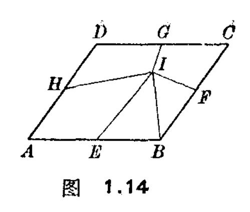


图 1.14

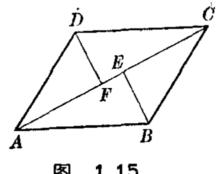


图 1.15

是把 $\square ABCD$ 分为若干部分，证明每一部分都被上述的四个半圆覆盖．要证明这一点，只要作出较长的那条对角线 AC，从 B、D 向 AC 各作一条垂线．设垂足为 E、F，则 $\square ABCD$ 被分成四个直角三角形：$\triangle AEB$、$\triangle BEC$、$\triangle CFD$ 与 $\triangle DFA$（图 1.15）．

根据例 2，每一个直角三角形被一个半圆覆盖，因而整个平行四边形被四个半圆覆盖．

显然上面的论证对于任意的四边形仍然成立．

下面的例题是前言中提到过的．

［例 10］　证明两个半径小于 r 的相同的圆不能覆盖 $\odot(O, r)$．

解一　设一个半径小于 r 的 $\odot O_1$ 已经放在 $\odot(O, r)$ 的上面．作 $\odot(O, r)$ 的直径 $AB\perp$ 连心线 OO_1（如果 O_1 与 O 重合，则 AB 为 $\odot(O, r)$ 的任一条直径）．A、B 不可能同时属于 $\odot O_1$，否则 $\odot O_1$ 的直径 $\geqslant AB$，与已知条件矛盾．

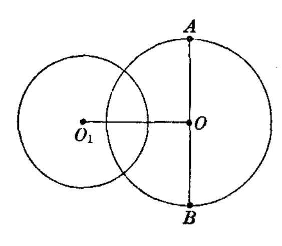


图 1.16

由于图 1.16 是关于 OO_1 对称的轴对称图形，$O_1A=O_1B$，因此 A、B 两点都不属于 $\odot O_1$．

另一个半径小于 r 的 $\odot O_2$ 不能同时覆盖 A、B 两点，否则 $\odot O_2$ 的直径 $\geqslant AB$．

于是 A、B 两点中至少有一个点不属于 $\odot O_1 \cup \odot O_2$, 即 $\odot O_1$ 与 $\odot O_2$ 不能覆盖 $\odot(O, r)$.

解二 考虑 $\odot(O, r)$的圆周. 每一个半径小于r的圆不能覆盖 $\odot(O, r)$ 的圆周的一半, 否则这个小圆覆盖 $\odot(O, r)$的一对对径点(即同一条直径的两个端点), 与小圆的半径小于 r 矛盾.

因此, 两个相同的小圆不能覆盖整个 $\odot(O, r)$的圆周, 当然更不能覆盖 $\odot(O, r)$.

两个半径为 r' ($r'<r$)的圆不能覆盖 $\odot(O, r)$, 三个半径为 r'($r'<r$) 的圆, 在 r'(与 r 相比)不太小时是能覆盖 $\odot(O, r)$的(这个结论可以推广到更一般的情形, 参见§4例9), 我们可以求出 r' 至少为多大.

[例11] 如果三个半径为 r' ($r'<r$)的圆能覆盖 $\odot(O,r)$, r' 至少要多大?

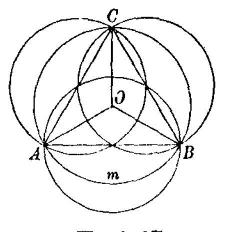


图 1.17

解 我们把 $\odot(O, r)$分为三个相等的扇形, 每个扇形的圆心角为 120° (图 1.17). 以弦 AB 为直径作圆, 因为 $\angle AOB=120°>90°$, 所以 $\triangle OAB$在所作的圆内. 同理可知弓形 AmB也在所作的圆内, 因而这个圆覆盖整个扇形 $OAmB$.

再以 BC、CA 为直径各作一圆, 这样的三个圆覆盖 $\odot(O, r)$, 它们的半径 $r'=\frac{\sqrt{3}}{2}r<r$.

不难看出, r' 不能再小了, 这是因为三个小圆中至少有一个要覆盖 $\odot(O, r)$的圆周的 1/3, 从而覆盖一条长为 $\sqrt{3}\,r$ 的弦, 所以小圆的半径一定$\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}r$.

[例 12] 用多少个半径为 $\frac{r}{2}$ 的圆才能覆盖 $\odot(O, r)$?

解 我们首先证明六个半径为 $\frac{r}{2}$ 的圆不能覆盖 $\odot(O,r)$.

因为每个半径为 $\frac{r}{2}$ 的圆至多能覆盖 $\odot(O, r)$ 的圆周的 $\frac{1}{6}$,如果六个这样的小圆能覆盖 $\odot(O, r)$,那么每一个小圆必须恰好覆盖 $\odot(O, r)$ 的圆周的 $\frac{1}{6}$.但这些圆不能覆盖 $\odot(O, r)$ 的圆心 O. 这可以反过来说明,如果某一个半径为 $\frac{r}{2}$ 的圆 $\odot\left(O_1, \frac{r}{2}\right)$ 覆盖 O 点,那这个圆至多只能含有 $\odot(O, r)$ 圆周上的一个点,而不会覆盖 $\odot(O, r)$ 的圆周的 1/6. 这是因为圆心距 $OQ_1 \leqslant \frac{r}{2} = r - \frac{r}{2}$, 从而 $\odot\left(O_1, \frac{r}{2}\right)$ 被 $\odot(O, r)$ 覆盖, 与 $\odot(O, r)$ 的圆周没有公共点或者仅有一个公共点(切点).

其次, 我们证明七个半径为 $\frac{r}{2}$ 的圆能覆盖 $\odot(O, r)$. 为此,作 $\odot(O, r)$ 的内接正六边形 $ABCDEF$,以这正六边形的每一条边为直径作圆, 这六个圆与 $\odot\left(O, \frac{r}{2}\right)$ 覆盖 $\odot(O, r)$ (图 1.18).

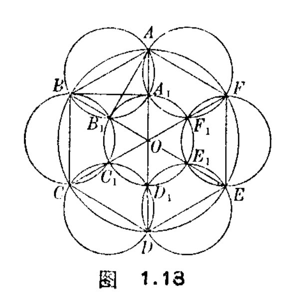


图 1.18

事实上,取 OA、OB、OC、OD、OE、OF 的中点 A_1、B_1、C_1、D_1、E_1、F_1,因为 $\triangle OAB$ 为正三角形, 所以 $\angle BB_1A = 90^\circ$, B_1 属于以 AB 为直径的圆,同样 A_1 也属于这个圆, 以 AB 为直径的圆覆盖四边形 AA_1B_1B. 由此不难得出结论. 详细的推导留给读者.

§2 嵌　　入

嵌入(也称做填入、放入)是一个与覆盖密切相关的问题.

定义 1　如果点集 N(能)覆盖点集 M,那么我们就说点集 M(能)嵌入点集 N 中.

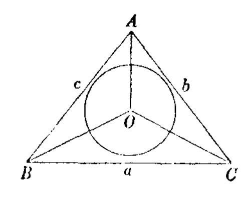


图 2.1

例如一个小圆能嵌入一个大圆中(§1 例 1).

[例 1]　如果 $\odot(O, r)$ 能嵌入 $\triangle ABC$ 中,问 r 最大为多少?

解　直观上看出,在能嵌入 $\triangle ABC$ 的圆中,以 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径为最大. 这一事实可以证明如下:

设 $\odot(O, r)$ 嵌入 $\triangle ABC$ 中, 那么 O 到 $\triangle ABC$ 各边的距离均大于或等于 r,所以

$$\triangle ABC=\triangle OBC+\triangle OAC+\triangle OAB\geqslant\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb$$

$$+\frac{1}{2}rc=\frac{1}{2}r(a+b+c),$$

从而
$$r\leqslant\frac{2\triangle ABC}{a+b+c}.$$

式中等号当且仅当 $\odot(O, r)$ 为内切圆时成立.

例 1 中的三角形换为正多边形或者任意一个有内切圆(即这圆与多边形的各边都相切)的多边形时,结论同样成立.

[例 2]　证明: 正 n 边形 M 能嵌入 $\odot(O, r)$ 中的充分必要条件是

M 的边长 $a \leqslant \odot(O, r)$ 的内接正 n 边形 M_n 的边长 a_n.

解 (1) 充分性 设 $a \leqslant a_n$. 以 O 为位似中心，作一个相似比为 $k=\dfrac{a}{a_n} \leqslant 1$ 的位似变换，那么 M_n 就变成在 M_n 中的正 n 边形 M'，且 $M' \cong M$. 因为 M_n 在 $\odot(O, r)$ 中，所以 M' 在 $\odot(O, r)$ 中. 换句话说，M 能嵌入 $\odot(O, r)$ 中(图 2.2(1)).

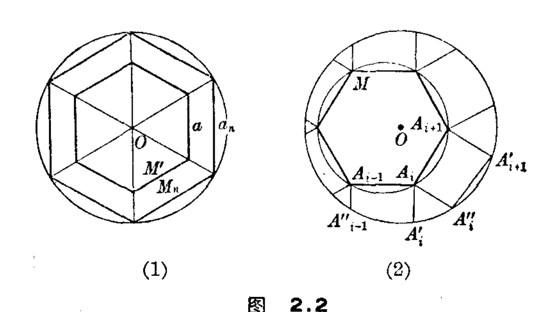


图 2.2

(2) 必要性 设正 n 边形 M 已嵌入 $\odot(O, r)$ 中. 自它的顶点 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 向 M 外作 $A_iA'_i$、$A_iA''_i$ 分别与 A_iA_{i-1}、A_iA_{i+1} 垂直(约定 A_0 即 A_n、A_1 即 A_{n+1})，交圆周于 A'_i、A''_i(图 2.2(2)). 因为

$$\angle A_{i-1}A_iA'_i + \angle A''_iA_iA_{i+1} + \angle A_{i+1}A_iA_{i-1}$$
$$=180^\circ + \angle A_{i+1}A_iA_{i-1} < 360^\circ,$$

所以 $\overset{\frown}{A''_{i-1}A'_i}$ 与 $\overset{\frown}{A''_iA'_{i+1}}$ 不相重迭($i=1, 2, \cdots, n$). 从而 $\overset{\frown}{A''_iA'_{i+1}}$ ($i=1, 2, \cdots, n$)中必有一个不大于 $\odot(O, r)$ 的圆周的 $\dfrac{1}{n}$，相应的弦 $A''_iA'_{i+1}$ 不大于 a_n. 而 $a=A_iA_{i+1}$ 是 $A''_iA'_{i+1}$ 的射影，所以 $A_iA_{i+1} \leqslant A''_iA'_{i+1}$. 因此更有 $a=A_iA_{i+1} \leqslant a_n$.

[例 3] 已知在 $\odot(O, r)$ 中嵌入一个点集 N，点集 N

由 n 个点组成，这 n 个点间的最小距离为 a. 在 a 分别为(1) $\sqrt{3}\,r$，(2) $\sqrt{2}\,r$，(3) r 时，求 n 的最大值.

解 (1) $n>1$ 时，这 n 个点都不会是圆心 O，否则 $a\leqslant r<\sqrt{3}\,r$，与已知矛盾. 根据同样的理由，这 n 个点中每两个点不在同一条半径上.

设这 n 个点为 A_1、A_2、$\cdots$、A_n，把其中每一点 A_i 与圆心 O 相连，再延长 OA_i 交圆周于 $A'_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$. 在 $i\neq j$ 时，我们设法证 $\angle A_iOA_j\geqslant 120°$. 如果 $\angle A_iOA_j<120°$，则 $A'_iA'_j$ 有

$$A'_iA'_j=2OA\sin\frac{\angle A_iOA_j}{2}<\sqrt{3}\,r,$$

因为三角形中任一线段不大于三角形的最长边即直径(见第 4 页)，所以，

$$A_iA_j\leqslant\max\,(A'_iA'_j,\ OA'_i,\ OA'_j)<\max(\sqrt{3}\,r,r,r)=\sqrt{3}\,r.$$

但是由已知 $A_iA_j\geqslant a=\sqrt{3}\,r$，矛盾，所以 $\angle A_iOA_j\geqslant 120°$. 由此得出，

$$n\leqslant 360°\div 120°=3.$$

即至多能嵌入三个点，这些点之间的距离 $\geqslant\sqrt{3}\,r$.

能嵌入三个相互间距离 $\geqslant\sqrt{3}\,r$ 的点是很显然的，只要使这三个点构成这圆的内接正三角形的三个顶点就可以了.

(2) 仿照(1)易知 n 的最大值为 4(四个点构成圆内接正方形的四个顶点).

(3) 易知 $n\leqslant 7$. 七个点中有一个点与圆心 O 重合，其余的六个点构成圆内接正六边形时，每两点间距离 $\geqslant r$.

图 2.3

例 3 的结论也可以说成是 $n=3$ 时，$a\leqslant\sqrt{3}\,r$；$n=4$ 时，

$a \leqslant \sqrt{2}r$; $n=7$ 时，$a \leqslant r$. 在习题 41与 42 中讨论了 $n=8$ 的情况.

下面考虑将 n 个集合 M_1、M_2、…、M_n 嵌入集合 N 中的问题.

定义 2 如果点集 M_1、M_2、…、M_n 满足条件 $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n \subset N$, 并且 $M_i \cap M_j$ 为空集($i, j=1, 2, \cdots, n, i \neq j$), 那么就说点集 M_1、M_2、…、M_n 嵌入点集 N 中.

定义 2′ 如果点集 M_1、M_2、…、M_n 能各经过一个运动(不要求是同一个运动)后成为点集 M'_1、M'_2、…、M'_n, 满足条件 $M'_1 \cup M'_2 \cup \cdots \cup M'_n \subset N$, 并且 $M'_i \cap M'_j$ 为空集($i, j=1, 2, \cdots, n, i \neq j$), 那么就说点集 M_1、M_2、…、M_n 能嵌入点集 N 中.

在本书中用得更多的是下面的定义 3 与定义 3′.

定义 3 如果有界闭集 M_1、M_2、…、M_n 满足条件 $M_1 \cup M_2 \cup \cdots \cup M_n \subset N$, 并且 M_i 的内部与 M_j 的内部没有公共点($i, j=1, 2, \cdots, n, i \neq j$), 那么就说点集 M_1、M_2、…、M_n 无重迭地嵌入点集 N 中.

定义 3′ 如果有界闭集 M_1、M_2、…、M_n 能各经过一个运动(不要求是同一个运动)后成为点集 M'_1、M'_2、…、M'_n, 满足条件 $M'_1 \cup M'_2 \cup \cdots \cup M'_n \subset N$, 并且 M'_i 的内部与 M'_j 的内部没有公共点($i, j=1, 2, \cdots, n, i \neq j$), 那么就说点集 M_1、M_2、…、M_n 能无重迭地嵌入 N 中.

定义 2 (2′) 与 3 (3′) 中的 n 个集合也可以改为无穷多个集合.

不难证明，在 $1 \leqslant r < 2$ 时，$\odot(O, r)$ 中只能无重迭地嵌入一个半径为 1 的圆. 在 $\odot(O, 2)$ 中能无重迭地嵌入两个半径为 1 的圆，但不能无重迭地嵌入三个半径为 1 的圆 (习题

38).

和前面一样，对于定义 $2'$ 及 $3'$ 中的 M_i 与 M_i'，我们不加严格区别，并常常采用同一记号 M_i.

[例 4] 证明 $\odot(O, 3)$ 中能且至多只能无重迭地嵌入七个半径为 1 的圆.

解 我们采用 §1 例 1 中用过的方法，将嵌入的圆收缩为一点，从而化为例 3 中讨论过的问题. 详细步骤如下:

先将每个圆的半径减少 1，这时 $\odot(O, 3)$ 变为 $\odot(O, 2)$，半径为 1 的圆变为点.

如果在 $\odot(O, 3)$ 中能无重迭地嵌入 n 个半径为 1 的圆，那么在 $\odot(O, 2)$ 中就能嵌入 n 个点（也就是这 n 个圆的圆心），相互间距离 $\geqslant 2$. 反过来，如果在 $\odot(O, 2)$ 中能嵌入 n 个点，相互间距离 $\geqslant 2$，那么在 $\odot(O, 3)$ 中就能无重迭地嵌入 n 个半径为 1 的圆.

因此，由例 3 得 $n \leqslant 7$，并且在 $n=7$ 时，应当把一个点放在 O 点，另六个点为 $\odot(O, 2)$ 的内接正六边形的六个顶点. 以这些点为圆心，半径为 1 作圆，就得到七个在 $\odot(O, 3)$ 中的、半径为 1 的、无重迭的圆.

下面的例 5 是这一方法的进一步发展，不仅需要将若干个圆收缩，还要将若干个圆适当地膨胀.

[例 5] $\odot(O, 18)$ 中已嵌入 16 个半径为 3 的圆，证明在余下的部分中还能嵌入 9 个半径为 1 的圆.

解 我们首先证明总能再嵌入 1 个半径为 1 的圆. 为此，将每个半径为 3 的圆膨胀为半径为 $3+1=4$ 的同心圆，而将 $\odot(O, 18)$ 收缩为 $\odot(O, 17)$. 如果能够证明在 $\odot(O, 17)$ 中去掉那 16 个半径为 4 的圆后，还能找到一个点 A_1，那么在 $\odot(O, 18)$ 中就能再嵌入一个圆，即 $\odot(A_1, 1)$.

要证明有这样的点 A 存在是很容易的．这只要计算一下面积，因为：

$\odot(O,\ 17)$的面积$=\pi\times17^2=289\pi$,

16 个半径为 4 的圆的总面积$=16\times\pi\times4^2=256\pi$,

$$289\pi-256\pi=33\pi>0,$$

所以从 $\odot(O,\ 17)$中去掉16个半径为 4 的圆(即使是不重迭的)后，余下的部分的面积不为零，当然不是空集，从中任取一点 A_1，则 $\odot(O,\ 18)$中能再嵌入一个圆 $\odot(A_1,\ 1)$.

采用与上面同样的方法，将 $\odot(O,\ 18)$收缩为 $\odot(O, 17)$，又将 17 个圆(16 个半径为 3 的圆及 $\odot(A_1,\ 1)$)的半径都增加 1 (圆心不变)，由于

$$289\pi-256\pi-\pi\times2^2=29\pi>0,$$

所以 $\odot(O,\ 17)$ 中去掉 16 个半径为 4 的圆及 $\odot(A_1,\ 2)$ 后，余下的部分不是空集，在其中取一点 A_2，则在 $\odot(O,\ 18)$ 中去掉嵌入的 16 个圆及 $\odot(A_1,\ 1)$ 后，还能嵌入一个半径为 1 的圆，即 $\odot(A_2,\ 1)$.

依此类推，由

$$(17^2\pi-16\times4^2\pi)\div2^2\pi=33\pi\div4\pi>8$$

即知命题成立．

［例 6］ 设用半径为 1 的圆能覆盖多边形 M 时，最少需要 a 个圆．又设 b 为圆心在 M 内、半径为1/2、两两无公共点的圆的最大个数，(1) 证明 $a\leqslant b$．(2) 若 b 是圆心在 M 中、半径为 1、两两无公共点的圆的最大个数，问 a 与 b 哪个大？

解 (1) 设 $\odot\left(O_1,\ \frac{1}{2}\right)$、$\odot\left(O_2,\ \frac{1}{2}\right)$、…、$\odot\left(O_b,\ \frac{1}{2}\right)$是 b 个圆心在 M 内的两两无公共点的圆，对每个 $\odot\left(O_i,\ \frac{1}{2}\right)$

作一个半径为1的同心圆$\odot(O_i, 1)$ $(i=1, 2, \cdots, b)$. 如果我们能够证明$\odot(O_i, 1)(i=1, 2, \cdots, b)$覆盖$M$, 那么$b\geqslant a$.

采用反证法. 如果$\odot(O_i, 1)(i=1, 2, \cdots, b)$不覆盖$M$, 那么$M$内有一点$A$不在任何一个$\odot(O_i, 1)$中, 于是$A$到每个点$O_i$的距离大于1, 从而$\odot\left(A, \frac{1}{2}\right)$与每一个圆$\odot\left(O_i, \frac{1}{2}\right)$ $(i=1, 2, \cdots, b)$都没有公共点, 这与b的最大性相矛盾. 证毕.

如果将M的边沿与它垂直的方向向外平移1, 同时以M的顶点为圆心, 1为半径作弧把它们连结起来, 得到一个有界闭集$M(r)$, 那么b的意义就是能嵌入$M(r)$的直径为1的圆的最大个数. $M(r)$的意义也可见习题69.

(2) 这里b也就是能嵌入$M(r)$的半径为1的圆的最大个数. 有趣的是, 现在的结论和(1)恰好相反, 是$b\leqslant a$.

设$\odot(O_1,1)$、$\odot(O_2,1)$、$\cdots$、$\odot(O_a,1)$覆盖M, $\odot(O'_1,1)$、$\odot(O'_2, 1)$、$\cdots$、$\odot(O'_b, 1)$是中心在M内的两两无公共点的圆, 那么每个点O'_i $(1\leqslant i\leqslant b)$一定在某个圆$\odot(O_j, 1)$中, 并且每个$\odot(O_j, 1)$中至多有一个点$O'_i$ $(1\leqslant i\leqslant b)$ (如果O'_i、O'_k都在$\odot(O_j, 1)$内, 那么O_j为$\odot(O'_i, 1)$与$\odot(O'_k, 1)$的公共点), 所以$b\leqslant a$.

注意, 这里的"两两无公共点"不能改为"无重迭部分". 例如图2.4中, 矩形$ABCD$的长$AD=2\sqrt{2}$, 宽$AB=\sqrt{2}$, E、F分别为BC与AD的中点, 则$\odot(A,1)$、$\odot(E,1)$、$\odot(D,1)$这三个圆无重迭部分. 但$\odot(O_1, 1)$、$\odot(O_2, 1)$这两个圆就能覆盖矩形$ABCD$, 这里O_1、O_2分别为AE、CF的中点.

例1至例6都是与圆有关的问题. 我们也可以考虑在正方形或正三角形等其他图形中嵌入正方形或正三角形等图

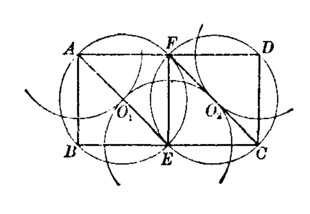


图 2.4

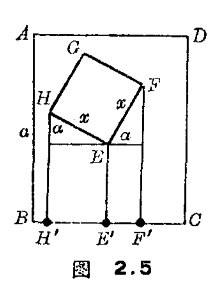


图 2.5

形.

[例 7] 已知在矩形 $ABCD$ 中嵌入一个边长为 x 的正方形 $EFGH$. 如果 $AB=a$, $BC=b$, $a\geqslant b$, 求 x 的最大值.

解 设 EF 与 BC 的夹角为 α, 则易知(图 2.5)

$$b=BC\geqslant HE \text{ 在 } BC \text{ 上的射影 } H'E'$$
$$+EF \text{ 在 } BC \text{ 上的射影 } E'F'$$
$$=x(\cos\alpha+\sin\alpha)\geqslant x \quad (\because\ \cos\alpha+\sin\alpha\geqslant 1).$$

因此 x 的最大值为 b. 并且等号仅当 $\alpha=0°$ 或 $90°$, 即有 $EF\perp BC$ 或 $HE\perp BC$ 时取得.

根据 §1 的例 8 及例 7, 如果在边长为 1 的正方形中嵌入一个边长为 a 的正三角形, 则 a 的最大值为 $\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$. 如果在边长为 1 的正三角形中嵌入一个边长为 a 的正方形, 则 a 的最大值为

$$\frac{1}{1+\dfrac{2}{\sqrt{3}}}=2\sqrt{3}-3.$$

由此可见, 嵌入与覆盖的关系十分密切, 可以说是互为对偶. 不仅如此, §1 例 8 与例 7 的方法对于嵌入问题也是很有用的. 下面的例 8 就采用了这种方法.

[例 8] 已知在直角三角形 ABC 中, 直角边 $CB=a$,

$CA=b$，问能嵌入这个直角三角形的正方形的边长最大是多少？

解 设正方形 $DEFG$ 嵌入 $\triangle ABC$ 中．经过运动可以假定顶点 G、F 分别在 CA、CB 上．如果 D、E 都不在斜边 AB 上，设直线 CD、CE 分别交 AB 于 D'、E'．不妨设 $\frac{CD'}{CD}\geqslant\frac{CE'}{CE}$，那么以 C 为位似中心，$\frac{CE'}{CE}$ 为相似比，作一个位似变换将正方形 $CDEF$ 变为比它大的正方形 $D''E'F'G'$，用正方形 $D''E'F'G'$ 代替正方形$DEFG$（图 2.6）．

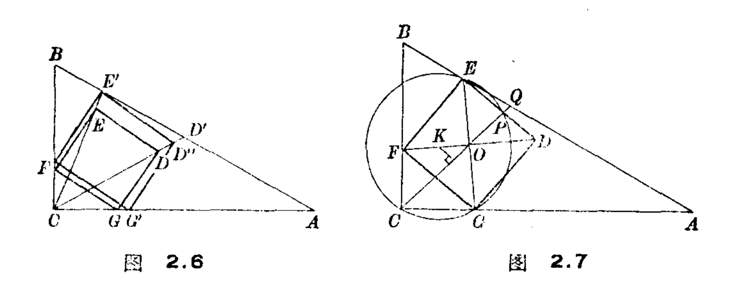


图 2.6　　　　图 2.7

因此我们可以假定正方形 $DEFG$ 的顶点 E、F、G 分别在 AB、BC、CA 上．设正方形的中心为 O，直线 CO 交 DE 于 P、交 AB 于 Q．如果 G 不与 C 重合，因为

$$\angle FOG+\angle FCG=90^\circ+90^\circ=180^\circ,$$

所以 O、F、C、G 四点共圆．$\angle OCG=\angle OFG=45^\circ$，即 OC 为 $\angle ACB$ 的平分线．因为

$$\angle PCG=\angle GEP=45^\circ,$$

所以 P、E、C、G 四点共圆，这圆圆心 K 在弦 EG 的垂直平分线 DF 上．由于斜线长≥垂线长，所以 K 到 CP 的距离≤ KO 即 CP 的弦心距≤EG 的弦心距，于是 $CP\geqslant EG$．从而

$$CQ \geqslant CP \geqslant EG.$$

当且仅当 G 与 C 重合、E 与 Q 及 P 重合时，$CQ=EG$.

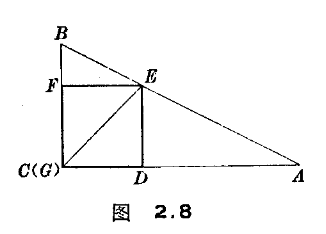


图 2.8

因此嵌入 $\triangle ABC$ 中的正方形 $DEFG$ 位置如图 2.8 所示时，对角线 EG（从而边长 EF）为最大.

这时 G 与直角顶点 C 重合，D、E、F 分别在 $\triangle ABC$ 的三条边上，并且 CE 为 $\angle ACB$ 的平分线．于是 $EF=\dfrac{CE}{\sqrt{2}}$.

我们可以用 a、b 来表达 EF，方法如下：

根据角平分线的性质，

$$\frac{BE}{EA}=\frac{a}{b},\quad \therefore\ \frac{EF}{b}=\frac{BE}{BA}=\frac{a}{a+b},$$

从而

$$EF=\frac{ab}{a+b}.$$

这就是直角三角形中嵌入的正方形的最大边长.

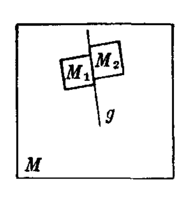
利用例 7 及例 8 可以解决下面的例 9 及例 10.

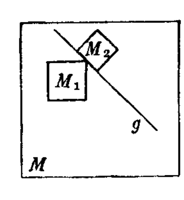
[例 9]　已知在边长为 a 的正方形 M 中无重迭地嵌入两个正方形 M_1、M_2，边长分别为 a_1、a_2．证明 $a \geqslant a_1+a_2$.

解　将正方形 M_1 在 M 中平移，总可以假定 M_1、M_2 有公共点但不重迭.

这时有三种可能的情况，如图 2.9 所示，读者不难验证不论在哪一种情况，我们都可以找到一条直线 g，使得正方形 M_1 的点在直线 g 的同一侧或在 g 上，而正方形 M_2 的点在直线 g 的另一侧或 g 上.

如果 g 与正方形 M 的边 AB 平行、与边 BC、AD 分别交于 E、F（图 2.10），那么由例 7 得





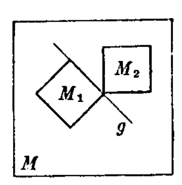


图 2.9

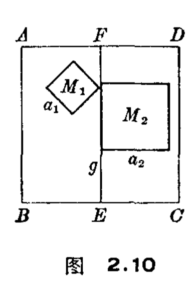


图 2.10

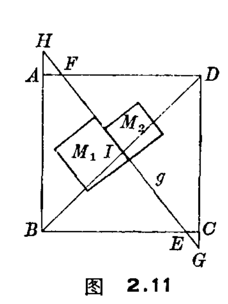


图 2.11

$$BE \geqslant a_1 \text{ 及 } EC \geqslant a_2,$$

相加得 $a = BE + EC \geqslant a_1 + a_2$.

如果 g 不与正方形 M 的边平行. 设 g 与 M 的边 BC、AD 分别交于 E、F, 与边 DC、BA 的延长线分别交于 G、H. 又设 g 与 M 的对角线 BD 交于 I (图 2.11). 因为 BD 平分 $\angle HBE$ 及 $\angle GDF$, 根据例 8, 由直角三角形 HBE 及 GDF 得

$$M_1 \text{ 的对角线} \leqslant BI,$$

$$M_2 \text{ 的对角线} \leqslant DI.$$

相加得

$$M_1 \text{ 的对角线} + M_2 \text{ 的对角线} \leqslant BD,$$

即

$$\sqrt{2}\, a_1 + \sqrt{2}\, a_2 \leqslant \sqrt{2}\, a,$$

所以

$$a_1 + a_2 \leqslant a,$$

［例 10］ 在边长为 2 的正方形 $ABCD$ 中嵌入一个边长为 1 的正方形 M，证明 M 一定覆盖正方形 $ABCD$ 的中心 O.

解 设正方形 M 不覆盖 O 点，那么 O 不在 M 的某一组平行边之间．过 O 作直线 g 与这组平行边平行，则正方形 M 在直线 g 的同一侧.

如果 g 与 AB 平行，设 g 与 BC 相交于 E(图 2.12)，则由例 8,

$$M\text{ 的边长} < BE = \frac{1}{2}BC = 1,$$

与已知矛盾.

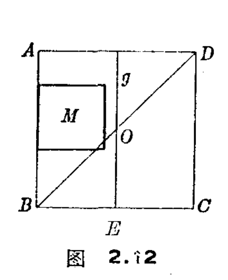


图 2.12

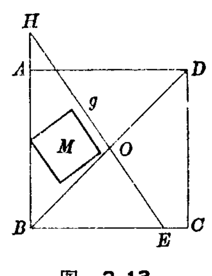


图 2.13

如果 g 不与正方形 $ABCD$ 的边平行，设 g 与 BC 相交于 E，与 BA 的延长线相交于 H(图 2.13)．由例 8,

$$M\text{ 的对角线} < BO,$$

即
$$M\text{ 的边长} < \frac{1}{\sqrt{2}}BO = \frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot BD = 1,$$

与已知矛盾．于是命题得证.

由例 10 可导出下面的例子.

［例 11］ 设正方形 $ABCD$ 的中心为 O，边长 a 满足 $1 < a < 2$．A'、B'、C'、D' 分别在 OA、OB、OC、OD 上并且 $OA' = OB' = OC' = OD' = \sqrt{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)$．证明如果一个边长为 1 的

正方形 M 嵌入正方形 $ABCD$ 中，那么 M 一定覆盖正方形 $A'B'C'D'$.

解 以 A' 为中心，C 为一个顶点可作出边长为 2 的正方形 $A''B''CD''$. 根据例 10，边长为 1 的正方形 M 一定覆盖这正方形的中心 A' (图 2.14).

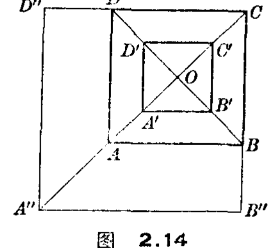


图 2.14

用同样的办法可证正方形 M 覆盖 B'、C'、D'. 因此正方形 M 覆盖正方形 $A'B'C'D'$.

最后，我们举一个例子，说明如何将无穷多个小正方形无重迭地嵌入一个大正方形中.

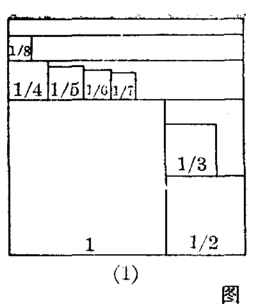
[例 12] 证明边长为 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$、$\cdots$ 的无限多个小正方形能无重迭地嵌入一个边长为 $1\frac{1}{2}$ 的正方形中.

解 下面的两种方法都可以将所述无限多个小正方形无重迭地嵌入大正方形中.

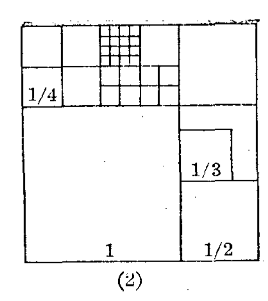
第一种方法，将边长为 1, 1/2, 1/3 的三个正方形无重迭地嵌入长为 $1\frac{1}{2}$、宽为 1 的矩形. 再将边长为 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$ 的正方形嵌入长为 $1\frac{1}{2}$、宽为 $\frac{1}{4}$ 的矩形. ……. 一般地，由于

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^{k+1}-1}\leqslant\frac{2^k}{2^k}=1,$$

边长为 $\frac{1}{2^k}$、$\frac{1}{2^k+1}$、$\cdots$、$\frac{1}{2^{k+1}-1}$ 的正方形可以无重迭地嵌入长为 $1\frac{1}{2}$、宽为 $\frac{1}{2^k}$ 的矩形中. 因为这些矩形的宽的和为



(1)



(2)

图 2.15

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots=1+\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}}=1\frac{1}{2}.$$

所以所述的无限多个小矩形可以无重迭地嵌入边长为 $1\frac{1}{2}$ 的大正方形中(图 2.15(1)).

第二种方法，将边长为 1、$\frac{1}{2}$、$\frac{1}{3}$ 的正方形无重迭嵌入长为 $1\frac{1}{2}$、宽为 1 的矩形中. 再将边长为 $\frac{1}{4}$、$\frac{1}{5}$、$\frac{1}{6}$、$\frac{1}{7}$ 的正方形分别嵌入图 2.15(2)左上角的四个边长为 $\frac{1}{4}$ 的正方形中.

将边长为 $\frac{1}{8}$、$\frac{1}{9}$、…、$\frac{1}{31}$ 的 24 个正方形无重迭地嵌入一个由三个边长为 $\frac{1}{4}$ 的正方形所组成的 L 形中：在两个边长为 $\frac{1}{4}$ 的正方形中各放四个正方形，在第三个边长为 $\frac{1}{4}$ 的正方形中放入边长为 $\frac{1}{16}$、$\frac{1}{17}$、…、$\frac{1}{31}$ 的16个正方形. 依次类推，每次将边长为 $\frac{1}{2^{2k-1}}$、$\frac{1}{2^{2k-1}+1}$、…、$\frac{1}{2^{2k+1}-1}$ 的 $2^{2k-1}+2^{2k}$ 个正方形放入一个 L 形中，L 形由三个边长为 $\frac{1}{2^k}$ 的正方形组成；前两个各放入 2^{2k-2} 个正方形，第三个放入边

长为 $\frac{1}{2^{2k}}$、$\frac{1}{2^{2k}+1}$、…、$\frac{1}{2^{2k+1}-1}$ 的 2^{2k} 个正方形. 这样就可以把所述的小正方形无重迭地嵌入边长为 $1\frac{1}{2}$ 的正方形中.

根据例 9, 我们知道这里的 $1\frac{1}{2}$ 不能改为更小的数.

§3 一些例题

这一节我们介绍一些例题．这些例题形式比较多样，其中有的是很著名的覆盖问题，有的结论或方法还可以用来解决其他问题．

［例 1］ 一个 30° 的角不能覆盖一个 40° 的角，两个 30° 的角不能覆盖一个 70° 的角．一般地，如果 $\angle A_1$、$\angle A_2$、…、$\angle A_n$ 的和小于 $\angle B(\leqslant 360^\circ)$，证明 $\angle A_1$、$\angle A_2$、…、$\angle A_n$ 不能覆盖 $\angle B$.

解 在§1中，我们说过，要证明集合 N_1、N_2、…、N_n 不能覆盖集合 M，可以对某种与集合 N_1、N_2、…、N_n 及 M 有关的度量进行比较，而得到结论．

一个角的弧度数（或角度数）显然是与这个角有关的量．设 $\angle A_i$ 的弧度数为 $\alpha_i(i=1, 2, \cdots, n)$，$\angle B$ 的弧度数为 β，那么

$$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n<\beta\leqslant 2\pi. \tag{1}$$

但是，我们不能从上式立即得到结论．因为“从上式可导出结论”正是需要我们证明的事实．

于是，我们转而考虑另一种与角有关的度量．以 $\angle B$ 的顶点 B 为圆心作一圆，设 $\angle B$ 的两边与圆周分别交于 C、D，那么 $\angle B$ 所对的弧 $\overset{\frown}{CD}$（可能是优弧）与 $\angle B$ 的弧度数相同，即 $\overset{\frown}{CD}=\beta$. 如果 A_i 能在上述圆内，设 $\angle A_i$ 的两边分别与 $\odot B$ 的圆周交于 C_i、$D_i(i=1, 2, \cdots, n)$，这时 $\overset{\frown}{C_iD_i}$ 与 $\angle A_i$ 的弧度数并不一定相同，虽然如此，$\overset{\frown}{C_iD_i}$ 的弧度数可以近似地代

替 $\angle A_i$ 的弧度数，或者说可以用来估计 $\angle A_i$ 的弧度数. 这样，我们就可以利用(1)式导出 $\widehat{C_iD_i}$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 不能覆盖 $\widehat{CD}$，从而导出 $\angle A_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$ 不能覆盖 $\angle B$. 这就是证明的基本思路.

详细些说，作 $\odot(B, r)$. 设 $a_i=A_iB$，取半径 $r>\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n} a_i$，那么 A_1、A_2、…、A_n 都在 $\odot(B, r)$内. 设 $\angle A_i$ 的边与圆周交于 C_i、D_i.

连结圆心 B 与 C_i、D_i. 设 $\angle A_i$ 所对弧 $\widehat{C_iD_i}=\beta_i$，则无论 β_i 为劣弧或优弧，由图 3.1(1)或(2)不难证明均有

$$\beta_i\leqslant\alpha_i+\gamma_i+\delta_i.\quad(i=1, 2, \cdots, n) \qquad (2)$$

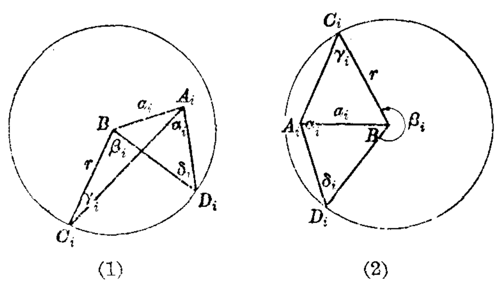


图 3.1

由于 A_i 在 $\odot B$ 内，$a_i<r$，所以 $\angle A_iC_iB=\gamma_i$ 为锐角. 在 $\triangle A_iBC_i$ 中，根据正弦定理，

$$\sin\gamma_i=\frac{a_i}{r}\sin\angle BA_iC_i\leqslant\frac{a_i}{r}.$$

因为 a_i 是固定数，所以

$$\lim_{r\to+\infty}\frac{a_i}{r}=0,$$

对于任给 $\varepsilon>0$，当 r 充分大时，$\dfrac{a_i}{r}<\varepsilon$

取 $\varepsilon=\sin\frac{1}{2n}(\beta-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n)$，则在 r 充分大时，

$$\gamma_i<\frac{1}{2n}(\beta-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n).\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{3}$$

同样，在 r 充分大时，

$$\delta_i<\frac{1}{2n}(\beta-\alpha_1-\alpha_2-\cdots-\alpha_n).\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)\tag{4}$$

由(2)、(3)、(4)得出，在 r 充分大时，

$$\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_n<\beta,\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

因此，$\angle A_i$ 所对的弧 $\widehat{C_iD_i}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 不能覆盖 $\angle B$ 所对的弧 $\widehat{CD}$，从而 $\angle A_1$、$\angle A_2$、$\cdots$、$\angle A_n$ 不能覆盖 $\angle B$.

作为例1的特殊情况，我们得出：有限多个角，如果度数的和小于 $360°$，那么这些角不能覆盖整个平面.

［例2］ 我们把两条平行直线之间的平面点集（包括这两条直线在内）称为带形，这两条平行直线称为带形的边，它们之间的距离称为带形的宽. 证明有限多个带形不能覆盖整个平面.

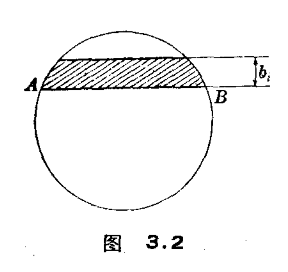


图 3.2

解一 对有关的量进行估计. 设这些带形的宽度的和为 $b_1+b_2+\cdots+b_n=s$. 作一个半径为 s 的圆. 考虑宽为 b_i 的带形与这圆的公共部分的面积 S_i，如图 3.2，

$$S_i\leqslant b_i\times AB\leqslant 2b_is.\quad(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

因此，这些带形与这圆的公共部分的面积的和

$$\leqslant 2b_1s+2b_2s+\cdots+2b_ns=2s(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$\leqslant 2s^2<\pi s^2.$$

即小于圆的面积，所以这些带形不能覆盖半径为 s 的圆，更不能覆盖整个平面.

解二 我们证明宽为 b_1、b_2、…、b_n 的带形不能覆盖任意一个宽为 $b>b_1+b_2+\cdots+b_n$ 的带形 S.

先考虑边与 S 的边平行的那些带形，由于它们的宽度的和小于 b，因此在带形 S 中有一条与边平行的直线 l，直线 l 上的点没有被它们覆盖.

再考虑剩下的带形．宽为 b_i 的带形在上面所说的直线 l 上覆盖的部分是一条长为 $\frac{b_i}{\sin\alpha_i}$ 的线段，其中 α_i 是这带形的边与 l 所夹的角．由于 $\alpha_i\neq 0$，所以 $\frac{b_i}{\sin\alpha_i}$ 是有限数．从而这些带形在 l 上覆盖的线段的和是有限的，它们不能覆盖直线 l.

因此，宽为 b_1、b_2、…、b_n 的带形不能覆盖带形 S，更不能覆盖整个平面.

将解二略加修改，得到下面的解三.

解三 由于带形的个数有限，因此存在一条直线 l 与每一个带形的边都不平行．这时，每一个带形在 l 上覆盖一条长为有限的线段，因而它们不能覆盖 l，更不能覆盖整个平面.

例 1 中角的个数不能改为无限多个．例 2 中带形的个数可以改为无限多个，只要这些带形的宽的和 $b_1+b_2+\cdots$ 是一个有限数，结论仍成立．这可以用解一（稍加修改）的方法来证明.

下面的例 3 可以利用例 2 来解决.

［例 3］ 平面上已给有限多条直线，证明对于任意正数 r，都可以作一个半径为 r 的圆与每一条已知直线都没有公共点.

解 对每一条已知直线 l_i，作一个带形 S_i，带形的边是到

l_i 的距离等于 r 的两条平行直线. 由例 2, S_1、S_2、…、S_n 不能覆盖整个平面, 即存在一点 O 不在带形 S_1、S_2、…、S_n 中, 所以 O 点到每条直线 $l_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的距离 $>r$, 从而以 O 为圆心、半径为 r 的圆与已知直线 l_1、l_2、…、l_n 都没有公共点. 证毕.

设 M 是由 n 个点组成的集合, 我们考虑点集 M 的覆盖圆.

[例 4] 如果 M 的直径为 1, 证明半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的圆能覆盖点集 M.

解 设 AB 是点集 M 的直径, 即 A、B 是 M 中距离最大的两个点. 根据已知 $AB=1$, 所以 $\odot(A, 1)$ 覆盖 M, $\odot(B, 1)$ 也覆盖 M, 从而 M 被这两个圆的公共部分, 也就是图 3.3 中的月形覆盖.

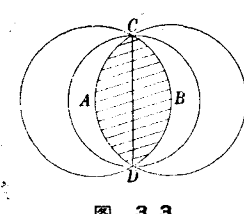


图 3.3

设两圆的公共弦为 CD, 易知 $CD=\sqrt{3}$, 并且以 CD 为直径作圆时这个圆覆盖图 3.3 中的月形, 因而覆盖点集 M. 证毕.

从例 4 的解法还可以导出点集 M 的最小覆盖圆是唯一的, 因为如果有两个不同的最小覆盖圆, 那么以它们的公共弦为直径的圆仍然覆盖点集 M, 这个圆比它们小.

例 4 中的常数 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 还可以进一步改善, 换为更小的数 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

[例 5] 证明直径为 1 的有限点集 M 能用半径 $\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆覆盖.

解 对于 M 中每三个点, 作一个最小覆盖圆, 由 §1 例

2，最小覆盖圆的半径$\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$．设在这些圆中，$\odot K$ 为最大，显然 $\odot K$ 的半径仍然不超过$\frac{\sqrt{3}}{3}$．我们证明 $\odot K$ 一定覆盖点集 M.

根据§1例2，这时会有两种情况：

(1) $\odot K$ 是以 AB 为直径的圆，A、B 属于 M.

设 C 为点集 M 中任意一点，如果 C 在 $\odot K$ 外，那么 $\angle ACB<90°$．在 $\triangle ABC$ 为钝角或直角三角形时，最大边大于 AB，从而 $\triangle ABC$ 的覆盖半径$>\frac{1}{2}AB$，与 $\odot K$ 的最大性矛盾．在 $\triangle ABC$ 为锐角三角形时，由§1例2知道这个三角形的覆盖半径大于 $\frac{1}{2}AB$，仍与 $\odot K$ 的最大性矛盾.

(2) $\odot K$ 是锐角三角形 ABC 的外接圆，A、B、C 属于 M.

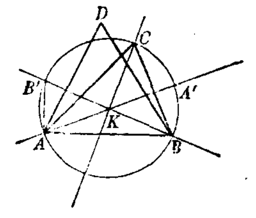


图 3.4

设 D 为点集 M 中任意一点．如果 D 在 $\odot K$ 外，不妨设它在图3.4中的 $\angle B'KC$ 内（A'、B' 分别为 A、B 的对径点）.

这时 $\angle ADB<\angle ACB<90°$．又 $DB\leqslant B'B$（否则覆盖 D、B 的圆比 $\odot K$ 大），所以 D 在直角 $\angle BAB'$ 内，$\angle DAB<90°$．同样，由 $DA\leqslant A'A$ 得 $\angle DBA<90°$．因此 $\triangle ABD$ 为锐角三角形，它的覆盖半径即它的外接圆半径．但 $\angle ADB<\angle ACB$，所以

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB}<\frac{AB}{\sin\angle ADB},$$

即 $\triangle ABD$ 的覆盖半径大于 $\odot K$ 的半径，与 $\odot K$ 的最大性矛盾！

从上面的解法可知最小覆盖圆一定是以 M 中某两个点连线为直径的圆或者是 M 中某三点的外接圆，这圆的半径(覆盖半径)有可能小于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$. 但在一般情况下，这里的 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 已经是最好的结果，不能改为更小的数. 例如边长为 1 的正三角形，它的覆盖半径恰好等于 $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

例 5 中的有限点集 M 可以改为无限点集.

在 §6 中，将用另一种方法来讨论这个问题.

例 5 有很多的应用. 例如由例 5 立即推出以下结论:

1. n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的最小覆盖圆是某个 $\triangle A_iA_jA_k$ 的外接圆或者以某个 A_iA_j 为直径的圆，那么

$$\text{覆盖半径} \leqslant \frac{\sqrt{3}}{3}\max A_iA_j.$$

2. 如果 n 个圆 $\odot(O_1, r_1)$, $\odot(O_2, r_2)$, $\cdots$, $\odot(O_n, r_n)$ 的圆心距离 d_{ij} 的最大值为 d，半径 r_i 的最大值为 r，那么一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}d+r$ 的圆能覆盖这 n 个圆.

[例 6]　点集 M 的直径 $\leqslant 1$，证明边长为 $\sqrt{3}$ 的正三角形能覆盖 M.

解　我们先看一看是否可以利用例 5 的结论. 由例 5，能用一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆覆盖 M，作这个圆的外切正三角形，这个外切正三角形当然覆盖 M，但是它的边长为

$$\sqrt{3}\times\frac{2\sqrt{3}}{3}=2>\sqrt{3},$$

因此要得出所需要的结论，还得另辟途径.

首先我们证明宽为 1 的带形能覆盖 M. 这只要作一个带形将点集 M 夹在中间(即覆盖 M)，然后再平移带形的边，

使带形的宽减少但仍然覆盖 M，直到带形的宽不能再进一步减少．这时，带形的宽 b 一定不大于 1．否则的话，设 $b>1$，带形的边为 l_1、l_2．作 $l_1'\parallel l_1$ 及 $l_2'\parallel l_2$，使 l_1' 与 l_1 的距离 $<\frac{b-1}{2}$；l_2' 与 l_2 的距离 $<\frac{b-1}{2}$，并且 l_1' 与 l_2' 在 l_1、l_2 之间(图 3.5)．如果 l_1 与 l_1' 之间没有属于 M 的点，那么可以用 l_1' 代替 l_1，使带形的宽减少但仍然覆盖 M．因此，在 l_1 与 l_1' 之间必有一点 $A_1\in M$． 同样，在 l_2 与 l_2' 之间必有一点 A_2 属于 M．而

$$A_1A_2>l_1'、l_2' \text{的距离}=b-\frac{b-1}{2}-\frac{b-1}{2}=1,$$

这与 M 的直径为 1 矛盾．

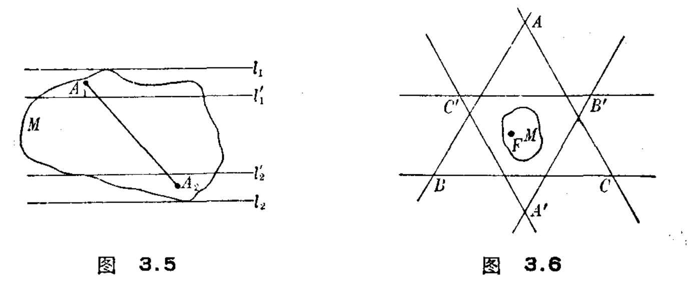


图 3.5　　图 3.6

上面的带形，它的边可以平行于任一条直线．因此，我们可以作三个宽≤1 的覆盖 M 的带形，它们的边之间的夹角为 $60°$(图 3.6)．

这三个带形的边相截得到图 3.6 中所示的两个正三角形：$\triangle ABC$ 与 $\triangle A'B'C'$．这两个三角形都覆盖点集 M，只要证明其中有一个的边长 $\leqslant\sqrt{3}$ 就可以了．

为此，设 $\triangle ABC$、$\triangle A'B'C'$ 的高分别为 h、h'．对于点集 M 中任意一点 F，F 到每一个带形的两条边的距离的和显

然$\leqslant 1$，因此 F 到三个带形的六条边的距离的和$\leqslant 3$. 但F到正三角形 ABC 的三条边的距离的和等于 h(«几何不等式»习题四 6)，到正三角形 $A'B'C'$ 的三条边的距离的和等于 h'，所以

$$h+h'\leqslant 3.$$

从而 h 与 h' 中至少有一个不大于 $3/2$，不妨假定 $h\leqslant 3/2$，那么

$$\triangle ABC \text{ 的边长}=\frac{2}{\sqrt{3}}h\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}\times\frac{3}{2}=\sqrt{3}.$$

证毕.

这里的常数 $\sqrt{3}$ 也是不能再加以改善的. 例如一个直径为 1 的圆 M，覆盖它的正三角形中以它的外切正三角形为最小(§1 例 5)，而外切正三角形的边长为 $\sqrt{3}$.

例 6 也有很多应用. 利用例 6 可以推出，每一个直径为 1 的点集能用一个边长为 $\sqrt{3}/3$ 的正六边形覆盖. 这里的常数 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 也是最佳的，即一般说来不能改为更小的数，例如直径为 1 的圆，覆盖它的正六边形中以它的外切正六边形为最小(§1 例 5)，而外切正六边形的边长为 $\sqrt{3}/3$.

如果点集 N 能覆盖任意一个直径为 1 的点集 M，我们称 N 为*万能覆盖*的点集. 用 N_3、N_4、N_6、K 分别表示万能覆盖的正三角形、正方形、正六边形、圆的最小面积，那么根据例 5、例 6 及上面所说，

$$K=\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{\pi}{3},\quad N_3=\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3})^2=\frac{3\sqrt{3}}{4},$$

$$N_6=6\times\frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

又由例 6 开始的一段证明可知每个直径为 1 的点集 M 能用

一个边长为1的正方形覆盖(作两个边互相垂直的、宽为1的带形将点集M覆盖，两个带形的公共部分就是所说的正方形)，因此

$$N_4=1.$$

这样就有
$$N_3>K>N_4>N_6.$$

寻求一个面积最小的万能覆盖的点集是迄今尚未解决的问题. 由习题68可知N_6并不是最小值.

[例7] n个圆，每两个都有公共点，证明可以用七颗图钉把它们全部钉住. 即可以找到七个点，使得每个圆至少含有这七个点中的一个点(T. Gallai问题).

解 设$\odot O$为其中半径最小的圆，不妨假定它的半径为1. 以O为圆心，作半径为$\sqrt{3}$的圆，设正六边形$O_1O_2O_3O_4O_5O_6$内接于$\odot(O, \sqrt{3})$，将七颗图钉钉在O、O_1、O_2、O_3、O_4、O_5、O_6，我们证明每一个已知圆均被钉住.

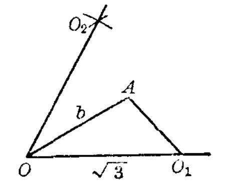


图 3.7

事实上，对任一已知$\odot(A, a)$，因为$\odot(A, a)$与$\odot(O, 1)$有公共点，所以$AO=b\leqslant a+1$. 如果O在$\odot(A, a)$内部，则这圆已被钉住. 假定O不在$\odot(A, a)$内部，则$b\geqslant a$. 不妨假定A点在$\angle O_1OO_2(=60^\circ)$内部或边上，并且$\angle AOO_1\leqslant 30^\circ$(图3.7). 于是，由余弦定理

$$AO_1^2=b^2+3-2b\sqrt{3}\cos\angle AOO_1$$
$$\leqslant b^2+3-3b.$$

因为$1\leqslant a$，所以$a^2-3a+3\leqslant a^2$，$(a+1)^2-3(a+1)+3=a^2-a+1\leqslant a^2$. 而$a\leqslant b\leqslant a+1$，所以由二次函数$y=x^2-3x+3$在$b$的值得

$$AO_1^2 \leqslant \max(a^2-3a+3,\ (a+1)^2-3(a+1)+3) \leqslant a^2.$$

于是 $AO_1 \leqslant a$，从而 O_1 属于 $\odot(A, a)$．换句话说，$\odot(A, a)$ 被在 O_1 处的图钉钉住．证毕．

实际上我们可以证明存在七个点，使每个已知圆的内部至少含有这七个点中的一个．这里我们就不详述了．

在习题 65、66 中讨论了"n 个等圆，每一个圆均与其中一个固定的圆有公共点"的问题，并且证明了图钉的个数 7 不能再进一步改善，但在例 7 中，图钉的个数还可以进一步改善．经过许多数学家的努力，最后为但泽(L. Danzer)彻底解决，他将"7"改进为"4"，并举例证明了 4 不能再进一步改善．如果例 7 中的已知圆都是相等的，那么能用三个图钉把它们全部钉住，参见习题 63．

[例 8]* 已知 N 是正 n 边形，证明对每一个正整数 m，都存在一个点集 M，M 中每 m 个点(组成的点集)都能被 N 覆盖，但 M 本身不能被 N 覆盖．

解 设 $\odot(O, r)$ 为 N 的内切圆，OP 为 N 的边心距，作 $\angle POQ=\frac{\pi}{2mn}$．$OQ$ 交 N 的边于 Q(图 3.8)，则 $OQ=r\sec\frac{\pi}{2mn}$．

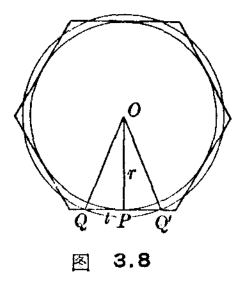


图 3.8

我们证明 $\odot\left(O,\ r\sec\frac{\pi}{2mn}\right)$ 就是所求的点集 M．

首先，因为 $r\sec\frac{\pi}{2mn}>r$，所以 N 不能覆盖 $\odot\left(O,\ r\sec\frac{\pi}{2mn}\right)$(§2 例 1)．

其次，对于 $\odot\left(O,\ r\sec\frac{\pi}{2mn}\right)$ 中任意的 m 个点 A_1、A_2、…、A_m，我们证明 N 能覆盖这 m 个点．设 Q' 是 Q 关于

OP 的对称点，注意 $\odot\left(O,\ r\sec\frac{\pi}{2mn}\right)$中只有 n 个弓形(如图 3.8 中的弓形 QtQ')未被 N 覆盖. 因此在 N 不动，而 A_1、A_2、…、A_n 绕 O 旋转时，只有在 A_i 落入$\angle QOQ'$ 这样的角中时，才有可能在 N 的外面. 这样的角有 n 个，每一个的大小为 $2\angle QOP=\frac{\pi}{mn}$. 即将点 A_i 转到 N 外的旋转角 α 所取的值至多构成$[0,\ 2\pi]$中的 n 个区间，每一个区间的长不超过 $\frac{\pi}{mn}$，它们的总长不超过 $n\times\frac{\pi}{mn}=\frac{\pi}{m}$. 于是，将点 A_1、A_2、…、A_m 中至少一个点转到 N 外的旋转角所构成的区间的总长$\leqslant m\times\frac{\pi}{m}=\pi<2\pi$. 所以在 $[O,\ 2\pi]$ 中存在一个数 β 不属于上面所说的那些区间，即绕 O 点作一个旋转角为 β 的旋转能使点 A_1、A_2、…、A_m 全部落入 N 中，换句话说 正多边形 N 能覆盖 $\odot\left(O,\ r\sec\frac{\pi}{2mn}\right)$中任意的$m$个点 A_1、A_2、…、A_m.

［例 9］ 证明如果有限多个圆覆盖着一个面积为 M 的点集，那么可以从中取出一组没有公共点的圆，它们覆盖一个面积$\geqslant\frac{1}{9}M$ 的点集.

解 我们先证明一个引理，这引理本身也是很有趣的.

引理 设 $\odot O$ 面积为 S，又有有限多个圆，每一个都与 $\odot O$ 有公共点，并且不大于 $\odot O$，那么这些圆(包括 $\odot O$ 在内)覆盖的总面积$\leqslant 9S$.

证明 设 $\odot O$ 的半径为 r，那么其他圆的半径$\leqslant r$. 因为这些圆都与 $\odot(O,\ r)$有公共点，所以每一个圆的圆心都在 $\odot(O,\ 2r)$中，从而这些圆都在 $\odot(O,\ 3r)$中. 因此，

$$覆盖的总面积\leqslant 9\pi r^2=9S.$$

引理证毕.

现在回到例 9 的证明.

首先从已知的有限多个圆中取出最大的一个(如果最大的圆不止一个,任取其中之一),设这圆为 $\odot(O_1, r_1)$,其面积为 S_1. 根据引理,这有限多个圆中,与 $\odot(O_1, r_1)$有公共点的圆及 $\odot(O_1, r_1)$覆盖的总面积 $M_1 \leqslant 9S_1$,所以

$$S_1 \geqslant \frac{1}{9}M_1.$$

把 $\odot(O_1, r_1)$及所有与 $\odot(O_1, r_1)$ 有公共点的圆全部去掉, 然后对剩下的圆进行同样的处理, 即找出一个最大的圆 $\odot(O_2, r_2)$, 面积为 S_2, 所有与 $\odot(O_2, r_2)$有公共点的圆及 $\odot(O_2, r_2)$ 覆盖的总面积 $M_2 \leqslant 9S_2$. 所以

$$S_2 \geqslant \frac{1}{9}M_2.$$

经过有限多次这样的手续便可以将这组圆(有限多个)全部处理完毕, 得出一组没有公共点的圆: $\odot(O_1, r_1)$、$\odot(O_2, r_2)$、…、$\odot(O_n, r_n)$,它们覆盖的总面积

$$S_1+S_2+\cdots+S_n \geqslant \frac{1}{9}(M_1+M_2+\cdots+M_n) \geqslant \frac{1}{9}M.$$

证毕.

例 9 中的不等式实际上是严格的不等式. 这是因为在引理的证明中, 与 $\odot(O, r)$ 有公共点的、半径 $\leqslant r$ 的圆至多与 $\odot(O, 3r)$的圆周有一个公共点,所以它们(个数为有限多个)不覆盖 $\odot(O, 3r)$的圆周,从而不覆盖 $\odot(O, 3r)$, 在引理中的不等式为严格的不等式.

利用例 9 的方法可以推出: 如果有限多个相似的多边形, 覆盖面积为 M 的点集, 那么可以从中找出一组没有公共点的多边形, 覆盖的面积 $>\alpha M$,其中 α 是一个小于 1 的正的

常数，仅与这些多边形的形状有关，与它们的个数无关．α 的最大值 σ 称为*覆盖常数*，对于各种图形定出 σ 的值是个很有趣的问题．关于 σ，目前所知甚少．

还有许多有趣的覆盖问题，例如：

1．已知圆 M 及圆 N_1、N_2、… 如果圆 M 的每一点都属于某一个圆 N_i 的内部，那么一定存在一个正数 d，具有这样的性质：在圆 M 中任作一个直径为 d 的圆，这圆一定被 N_1、N_2、… 中某一个覆盖．正数 d 称为勒贝格(Lebesgue)数．

2．任意多个不相重迭的圆不覆盖整个平面，也不覆盖一个正方形，除非其中有一个圆覆盖这个正方形．

3．对于正方形 M，一定能找到有限多个在这个正方形中的、互相没有公共点的圆，这些圆所覆盖的面积 $>M-\varepsilon$，其中 ε 为任意给定的小正数．

这里的圆当然是不全相等的，§5 讨论了在正方形中无重迭地嵌入若干个相等的圆的问题．

4．在直角坐标系中，一个面积 $>n$（n 为自然数）的有界闭集能覆盖 $n+1$ 个格点（坐标为整数的点）．限于篇幅，这里就不详细介绍了．

§4 凸　集

前面三节讨论了圆、凸多边形与带形的覆盖问题. 圆、凸多边形与带形都是凸集.

本节介绍凸集的定义及其简单性质.

定义 1　如果对于点集 M 中任意两点 A、B, 线段 AB 上的每一点都属于点集 M, 那么 M 就称为凸集.

显然线段、直线、射线、带形及整个平面都是凸集.

一条直线 g 将平面分为两个部分, 在直线 g 的同一侧的点所成的集合称为开半平面. 开半平面与直线 g 的并集称为闭半平面. 开半平面与闭半平面也都是凸集.

空集、仅含一个点的集, 都算作凸集.

[例 1]　证明圆是凸集.

解　设圆心为 O, 半径为 r. 如果 A、B 两点属于 $\odot O$, 那么 $OA\leqslant r$, $OB\leqslant r$.

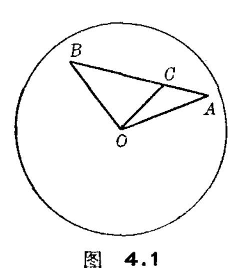


图 4.1

设 C 为线段 AB 上任意一点. 因为

$$\angle OCA+\angle OCB=180^\circ,$$

所以 $\angle OCA$, $\angle OCB$ 中必有一个不小于 90°, 不妨设 $\angle OCA\geqslant 90^\circ$.

在 $\triangle OCA$ 中, $\angle OCA\geqslant 90^\circ>\angle OAC$, 所以 $OC\leqslant OA\leqslant r$, 即 C 点属于 $\odot(O, r)$. 于是 $\odot(O, r)$ 为凸集.

由于圆是凸集, 要证明 $\odot(O, r)$ 覆盖 $\triangle ABC$, 我们只要

证明 $\triangle ABC$ 的顶点 A、B、C 都属于 $\odot(O, r)$(在前几节中，我们已经这样做了)．由此可见，对于覆盖问题，凸集这个概念是十分重要、十分有用的．但用得更多的是下面所说的凸形．

定义 2 一个有界闭集，如果是凸集，那么就称为*凸形*．

线段和圆都是凸形．可以证明椭圆也是凸形(参见«几何不等式»习题一 17)．

两个凸集的并不一定是凸集，例如两个外离的圆．但两个凸集的交却一定是凸集．

[例 2] 已知 M_1、M_2 都是凸集，$M=M_1\cap M_2$，证明 M 也是凸集．

解 设 A、B 为 M 中的两个点，C 为线段 AB 上一点．要证明点 C 属于 M．

由于 $A\in M$，而 $M=M_1\cap M_2$，所以 $A\in M_1$．同理 $B\in M_1$．因为点集 M_1 为凸集，C 为线段 AB 上一点，所以 $C\in M_1$．

同理 $C\in M_2$，所以 $C\in M_1\cap M_2=M$．即 M 为凸集．

用同样的方法可得任意多个凸集的交仍然是凸集．因此凸多边形(若干个闭半平面的交集)是凸集，而且是凸形．

对于每一个点集 M，都有包含它的凸集(例如全平面)．所有包含 M 的凸集，它们的交也是一个凸集(例 2)，并且是包含 M 的最小凸集，我们称它为点集 M 的*凸包*，并记为 $\widetilde{M}$．

例如 M 是由四个点 A_1、A_2、A_3、A_4 组成的集合，这时有三种情况(图 4.2)：

(1) $\widetilde{M}$ 是凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$．

(2) $\widetilde{M}$ 是一个三角形，比如说 $\triangle A_1A_2A_3$．

(3) $\widetilde{M}$ 是一条线段，比如说 A_1A_2．

一般地，n 个点 A_1、A_2、$\cdots$、A_n 的凸包是一个凸 m 边形

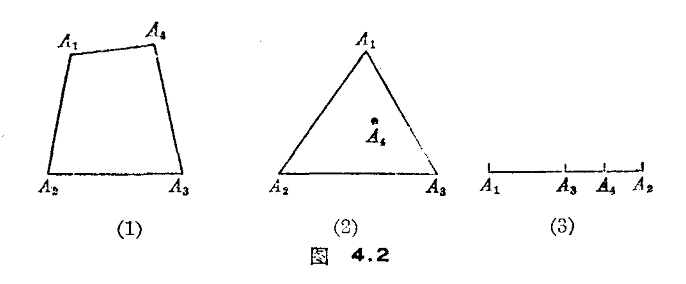


图 4.2

(或一条线段)；它的 m 个顶点(或两个端点)是集合 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 的一个子集.

关于点集及其凸包的直径,有一个重要结论：点集 M 的直径与它的凸包 $\widetilde{M}$ 的直径相等(证明可以参见吴利生、庄亚栋《凸图形》第 32 页,上海教育出版社 1982 年版).

例如点集 M 由两个外离的圆组成,则凸包 $\widetilde{M}$ 为图 4.3 中阴影部分,其中 AB、CD 是两个圆的两条外公切线.

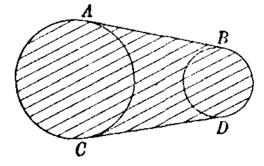


图 4.3

根据凸包的定义,如果凸集 N 覆盖点集 M,那么凸集 N 覆盖点集 $\widetilde{M}$. 因此在讨论用凸集覆盖点集 M 时,我们可以假定 M 是个凸集(如果 M 不是凸集,用凸包 $\widetilde{M}$ 代替集 M).

下面再举几个凸集的例子.

[例 3]　M 为一点集(不一定是凸集),点 $A \in M$,如果对于任意一点 $B \in M$,线段 AB 上的每一点都属于 M,那么就说 A 能看见点集 M, M 中所有能看见集合 M 的点组成一个集合 N,证明点集 N 是一个凸集.

这实际上就是前言中提到的"广场设哨"问题.

解　我们先举两个简单的例子说明点集 N 的意义.

如果 M 是凸集，那么 M 中的每一点都能看见点集 M，所以这时 $N=M$，N 是一个凸集.

如果 M 是图 4.4 中的凹四边形 $ABCD$，那么点集 N 由阴影部分的点组成，是一个凸集.

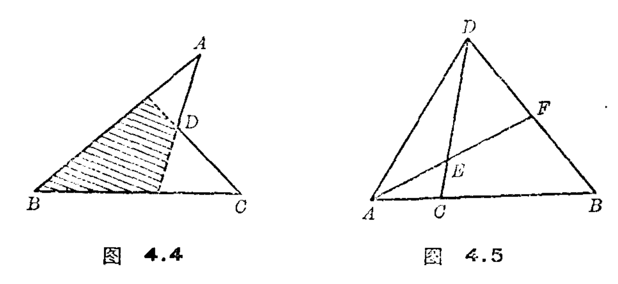


图 4.4　　图 4.5

现在我们来证明点集 N 是一个凸集. 设点 $A、B\in N$，C 为线段 AB 上任意一点，要证明 $C\in N$ (图 4.5).

根据点集 N 的定义，A 可看见 M. 因为 $B\in M$，所以线段 AB 上每一点属于 M，因此 $C\in M$.

设 D 为点集 M 中任意一点，E 为线段 CD 上任意一点. 要证明 $C\in N$，只要证明 $E\in M$. 连结 BD，AE. 延长 AE 与 BD 交于 F. 因为 $B\in N$，所以 $F\in M$.

因为 $A\in N$，$F\in M$，所以线段 AF 上的点全属于 M，特别地，点 $E\in M$. 证毕.

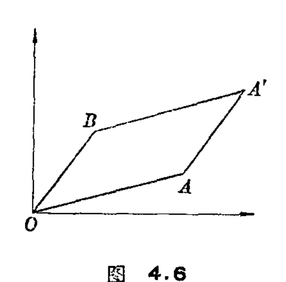


图 4.6

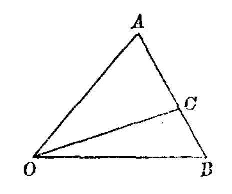
注意例 3 中的 N 可能是空集或由一点组成.

下面的两个例题与平移有关.

每一个平移可以用一个向量表示，而一个向量又可以用坐标平面上一个点表示. 即设 O 为原点，将 O 变为点 B 的平移 $\overrightarrow{OB}$ 我们

就用点 B 来表示．这时，对任一点 A，以 B、O、A 为顶点作成 $\square BOAA'$（图 4.6），则由于 $AA' \mathrel{\underline{\parallel}} OB$，$A$ 点经过平移 $\overrightarrow{OB}$ 后变为 A'．同时我们看出，B 点经过平移 $\overrightarrow{OA}$ 后变为 A'，这个性质下面要用到．

［例 4］ 已知凸集 M、N．N' 是具有以下性质的点 B 所成的集合：点集 M 经过平移 $\overrightarrow{OB}$ 后被点集 N 覆盖．证明点集 N' 是一个凸集．



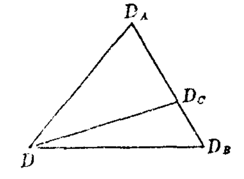


图 4.7

解 设 A、B 两点属于点集 N'，C 为线段 AB 上任意一点，要证明 $C \in N'$，即点集 M 经过平移 $\overrightarrow{OC}$ 后被点集 N 覆盖．

设 D 为点集 M 中任意一点，经过平移 $\overrightarrow{OA}$ 后，D 变为点 D_A，经过平移 $\overrightarrow{OB}$ 后，D 变为点 D_B．于是经过平移 $\overrightarrow{OD}$，A 变为 D_A，B 变为 D_B，线段 AB 变为线段 D_AD_B，C 变为线段 D_AD_B 上一点 D_C．

由于 C 经过平移 $\overrightarrow{OD}$ 变为 D_C，所以 D 经过平移 $\overrightarrow{OC}$ 变为 D_C．

因为 $A \in N'$，$D \in M$，所以 $D_A \in N$．同理 $D_B \in N$．已知 N 为凸集，D_C 在线段 D_AD_B 上，所以 $D_C \in N$，即点集 M 中任一点 D 经过平移 $\overrightarrow{OC}$ 后属于点集 N．证毕．

如果将例 4 中"被 N 覆盖"改为"覆盖 N"，结论仍然成立，证法也大致相同．例 4 中"被 N 覆盖"还可改为"与 N 有

公共点”(见习题114).

下面看一看凸集的覆盖问题.

我们知道一个大圆能覆盖一个小圆(§1 例1),一个大正方形(或正三角形)能覆盖一个小正方形(或正三角形). 这里的大圆与小圆,大正方形与小正方形,大正三角形与小正三角形都是相似的. 一般说来,如果两个点集 M、N 的点之间可以建立起一一对应,并且连结 M 中任意两点的线段与连结 N 中对应两点的线段的比是一个定值 k,我们就称点集 M 与 N 相似,k 称为相似比. 如果 M 与 N 相似,即使 M 的直径比 N 大,M 也不一定能覆盖 N,例如 M 是一个圆周(或一个圆环)时. 但对于凸集 M,我们有下面的结论.

[例5] 如果点集 M 与 N 相似,M 的直径大于 N 的直径,并且 M 是凸集,那么点集 M 能覆盖点集 N.

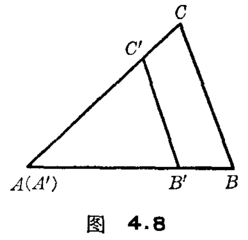


图 4.8

解 在 M 中任取一点 A,经过运动使 A 和它在 N 中的对应点 A' 重合,并且过 A 的一条射线 AB 与对应的射线 $A'B'$ 重合(B 与 B' 是对应的两点).

对于点集 N 中任一点 C',设它与 M 中的 C 点对应,则由于对应边比例,所以 $\triangle A'B'C' \backsim \triangle ABC$,从而 $\angle B'A'C' = \angle BAC$,即相似变换是保角的(保持角的大小不变).

由于射线 $A'B'$ 与 AB 重合,所以至多经过一次轴对称后,射线 AC 与 $A'C'$ 重合. 直径经相似变换后仍然是直径. 已知 M 的直径比 N 大,也就是相似比 $k=\dfrac{A'C'}{AC}<1$,所以 C' 落在线段 AC 内. 因为 M 是凸集,所以 C' 属于点集 M. 从而

点集 M 能覆盖点集 N. 证毕.

如果点集 M 与 N 相似，并且对应点的连线通过一个定点 O, 那么称点集 M 与 N 位似. O称为位似中心.

［例 6］ 证明对每个凸形 M, 有一个外接矩形(即每条边上都有 M 的点的、覆盖 M 的矩形)，它的一条边与已知直线 l 平行.

解 我们可以作一个带形，它的边与 l 平行，并且这个带形覆盖点集 M. 平移带形的边，使得带形的宽减少，但仍然覆盖 M, 直到带形的两条边 AB、CD 都与 M 的边界有公共点. 这时 $AB(CD)$ 称为凸形 M 的支持直线，换句话说，一条直线 AB 如果满足下面的两个条件:

(1) AB 与点集 M 有公共点.

(2) 点集 M 的点都在 AB 的同一侧或在 AB 上.

那么 AB 就称为点集 M 的支持直线(或承托直线). AB 与点集 M 的公共点称为支持点.

用和上面同样的方法，再作两条垂直于 l 的支持直线把点集 M"夹"在中间. 这四条支持直线形成的矩形 $ABCD$ 就是所要求的外接矩形.

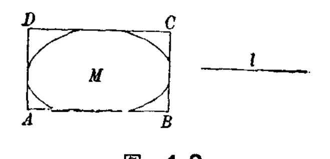


图 4.9

如果上述的矩形 $ABCD$ 中，$AB=BC$, 那么矩形 $ABCD$ 就是凸形 M 的外接正方形. 如果 $AB\neq BC$, 不妨设 $AB>BC$. 让 l 依反时针方向连续转动，对于 l 的每一个位置，由上面的例题，凸形 M 有一个外接矩形，它的一条边与 l 平行. 在 l 转过 $90°$ 时，得到的外接矩形 $A'B'C'D'$ 与原来的矩形 $ABCD$ 相同，但现在 AB 变为 $B'C'$, BC 变为 $C'D'$. 因为在这连续转动的过程中，差 $AB-BC$ 由正变负，所以一定有一个

时刻，$AB-BC=0$，即 $AB=BC$．这时外接矩形 $ABCD$ 成为外接正方形．因此，每一个凸形 M 都有一个外接正方形．

凸形 M 不仅有外接正方形，而且有内接正方形，即顶点全在 M 的边界上的正方形．这称为西涅日耳曼定理，是苏联数学家西涅日耳曼首先证明的．证明相当困难，我们就不介绍了．

在凸形的覆盖问题中，支持直线起着极重要的作用．它具有许多与圆的切线相类似的性质．例如对于任一方向 l，可以作两条平行于 l 的支持直线，将这个凸形夹在中间．过凸形外的一点可以作两条支持直线等等．但也有不同之处，例如圆的切线与圆只有一个公共点即切点，而一个凸形的一条支持直线上，支持点可能是一个，也可能是无穷多个(组成一条线段)．

[例 7]　已知凸形 M．证明能用一个面积$\leqslant 2M$ 的平行四边形覆盖 M．

解　首先依任意方向作两条平行的支持直线将 M 夹在中间．设 F、H 分别为这两条直线的支持点(如果有许多支持点，任取其中之一)．

再作两条平行于 FH 的支持直线．这四条支持直线相截得到一个覆盖 M 的 $\square ABCD$ (图 4.10)．

设 E、G 分别为 AB、CD 的支持点，则因为 M 为凸形，

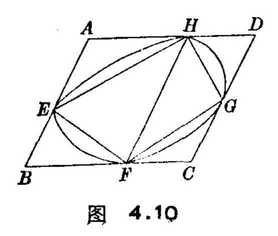


图 4.10

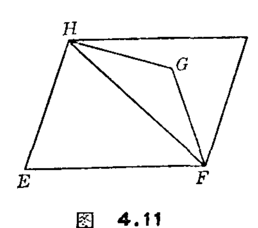


图 4.11

E、F、G、H 属于 M，所以四边形 $EFGH$ 被 M 覆盖，从而

$$\square ABCD=\square ABFH+\square HFCD$$
$$=2\triangle EFH+2\triangle FGH\leqslant 2M.$$

等号仅在 M 为四边形 $EFGH$（可能有顶点重合，这时四边形退化为三角形）时，才能成立．但由图 4.11 易知，每个非退化的凸四边形 $EFGH$ 都有一个面积小于它的两倍的平行四边形覆盖它．因而在 M 不为三角形时，覆盖 M 的平行四边形的最小面积$<2M$．而由习题 7，在 M 为三角形时，覆盖 M 的平行四边形的最小面积为 $2M$．

例 7 中的平行四边形可以改为矩形，参见习题 94．

由于每个面积$\leqslant 2M$ 的平行四边形能用一个面积$\leqslant 4M$ 的三角形覆盖（习题 8），因此由例 8 推得每一个凸形 M 可以用一个面积为 $4M$ 的三角形覆盖．可以证明更强的结论：对每一个凸形 M，存在一个面积$\leqslant 2M$ 的三角形覆盖 M，并且这个三角形有一条边平行于已知直线 l．当且仅当 M 为平行四边形时，覆盖 M 的三角形的最小面积等于 $2M$．

最后，我们介绍一下与覆盖问题密切相关，本身也很有趣的光照问题．

如图 4.12 所示，M 是一个凸形，设从方向 l 射来一束平行的光线，那么 $\overset{\frown}{AB}$ 被光线照到，M 的其余的部分不被光线照到．这里我们约定弧的端点 A、B 是不算作被光线照到的．

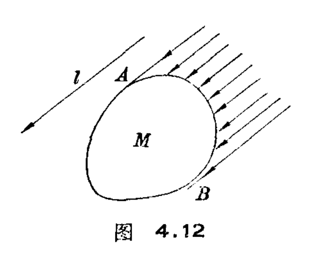


图 4.12

确切地说，如果 M 的点 C 满足下列条件：

(1) 在所有平行于 l 的直线中，有一条 p 过 C，并且顺着方向 l 看来，C 是直线 p 与 M 的第一个公共点．

(2) p 不是支持直线.

那么我们就说 C 被一束平行于 l 的光线照到.

使凸形 M 的边界上的每一点都至少被一束光线照到时所需要的最少的光线束数记为 $c(M)$，也就是说，有 $c(M)$ 束光线，使得 M 的边界上的任意一点至少被其中一束光线照到，并且对于任意的 $c(M)-1$ 束光线，M 的边界上至少有一点不被这些光线中任何一束照到.

例如图 4.13 说明，对于圆，$c(M)\leqslant 3$；对于平行四边形，$c(M)\leqslant 4$.

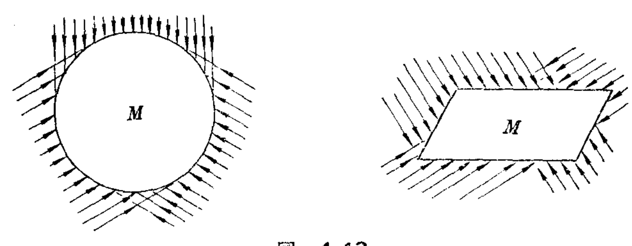


图 4.13

不难看出当 M 为平行四边形时，$c(M)=4$，并且对于任意的凸形 M，$c(M)\geqslant 3$. 可以证明：

如果凸形 M 不是平行四边形，那么 $c(M)=3$.

这个命题的证明并不困难，但很冗长，这里就不作介绍了.

光照问题与覆盖问题有密切的关系.

在前面几节，我们已经看到圆或正方形能被三个较小的圆或正方形覆盖，不能被两个较小的圆或正方形覆盖. 对于一般的凸形 M，用 $b(M)$ 表示能覆盖 M 的、比 M 小的位似形的最少个数，即用 $b(M)$ 个比 M 略小的 M 的位似形能覆盖 M，而任意 $b(M)-1$ 个比 M 小的 M 的位似形，不能覆盖

M. 我们将证明在凸形 M 不是平行四边形时，$b(M)=3$. 而在 M 为平行四边形时，$b(M)=4$. 推广到一般，就是下面的例 8.

[例 8]* 对任意的凸形 M, $b(M)=c(M)$.

解 (1) 先证明 $c(M)\leqslant b(M)$.

设位似形 M_1、M_2、…、M_n 覆盖 M, 位似中心分别为 O_1、O_2、…、O_n, 相似比分别为 k_1、k_2、…、k_n, 并且 $k_i<1(i=1, 2, \cdots, n)$. 在 M 中任取一点 A 不与 O_1、O_2、…、O_n 重合. 令 $l_i=\overrightarrow{O_iA}$, 我们证明 l_1、l_2、…、l_n 方向的光线能照到整个 M 的边界，这只要证明 M 的被 M_i 覆盖的边界上的任一点 B 能被平行 l_i 的光线束照到就可以了(图 4.14).

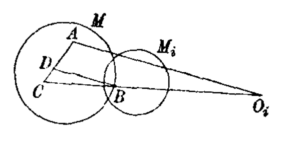


图 4.14

将 M 的边界点 B 看作 M_i 的点，它与 M 中一点 C 对应. 因为 M 为凸形，所以线段 AC 上每一点都属于 M. 在线段 AC 内取 D, 使 $\dfrac{AD}{AC}=\dfrac{O_iB}{O_iC}=k_i<1$, 则 $BD\parallel O_iA$. 因为 A、C 在 BD 的两侧，所以 BD 不是 M 的支持直线，又 B 为 $\overrightarrow{BD}$ 与 M 的第一个公共点，所以 B 被平行于 l_i 的光线照到. 于是，$c(M)\leqslant n=b(M)$.

(2) 证明 $c(M)\geqslant b(M)$.

设 l_1、l_2、…、l_n 这 n 束光线能照到整个 M 的边界. 与每束光线 l_i 相对应，M 的边界上有一条弧 $\varDelta_i$ 被这束光线照到，但 $\varDelta_i$ 的端点 A_i 不被 l_i 照到，而是被另一束光线 l_j 照到，所以 $\varDelta_i$ 与 $\varDelta_j$ 有重迭部分. 我们可以取比 $\varDelta_i$ 略小的弧 $\varDelta_i'$, 使得 $\varDelta_i'$, 包括它的两个端点 A_i'、B_i' 在内，被 l_i 照到，并且 $\varDelta_1'\cup\varDelta_2'\cup\cdots\cup\varDelta_n'$ 是整个 M 的边界.

在 M 的内部取定一点 O, 由 O 与 $\varDelta_i'$ 构成一个“扇形” S_i,

即 O 与 Δ_i' 的凸包(图 4.15 中阴影部分). 我们证明, 可以作出 n 个与 M 位似的、比 M 较小的凸形 M_1、M_2、…、M_n, 使得 M_i 覆盖扇形 $S_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$, 从而 $b(M)\leqslant n$.

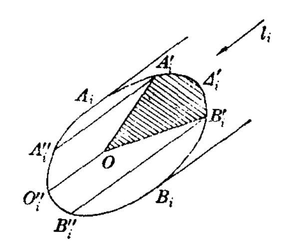


图 4.15

过 A_i、B_i、O_i 作平行于 l_i 的直线, 与 M 的边界分别相交于 A_i''、B_i''、O_i''. 取正数 h_i 是小于长度 $A_i'A_i''$、$B_i'B_i''$、OO_i'' 中最小的一个数, 将 M 沿与 l_i 相反的方向平移 h_i, 得到凸形 M_i', 则扇形 S_i 在 M_i' 内部.

在凸形 M_i' 内取一点 O_i. 以 O_i 为位似中心, 充分接近 1 的数 k_i 为相似比, 作位似变换, 将 M_i' 变为与它位似的凸形 M_i, 使 M_i 仍然覆盖扇形 S_i.

这样得到的 n 个凸形 M_1、M_2、…、M_n 覆盖 M, 只要证明每个 $M_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ 确实与 M 位似, 命题就证完了. 这就是下面的引理.

引理　设点集 M 经过平移后变为 M', M' 与 M'' 位似, 那么 M'' 与 M 位似.

证明　设 O' 为 M' 与 M'' 的位似中心, 相似比为 k. 将 M' 平移成 M 时, O' 平移到 O.

在直线 OO' 上取 I, 使 $\dfrac{IO'}{IO}=k$. 我们证明 I 就是 M 与 M'' 的位似中心.

对任一点 $A\in M$, 经过平移后 A 变成 $A'\in M'$, A' 与 $A''\in M''$ 对应(图4.16), 则

$$\frac{IO'}{IO}=k=\frac{O'A''}{O'A'}=\frac{O'A''}{OA},$$

所以 $\triangle IOA \backsim \triangle IO'A''$, I、A、A'' 共线，并且

$$\frac{IA''}{IA}=k.$$

因此 M'' 与 M 位似，相似比为 k，位似中心为 I. 引理证毕.

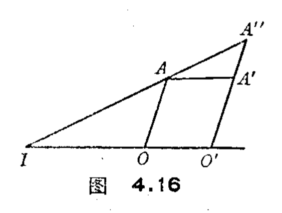
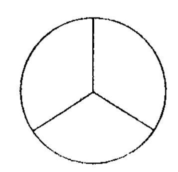


图 4.16

记 M 的直径为 $d(M)$. 另一个与凸形 M 有关的数是 $a(M)$，它表示分 M 为直径 $<d(M)$ 的部分时的最小份数，即可以把 M 分为 $a(M)$ 个部分，每一个部分的直径都小于 $d(M)$，并且不论怎样将 M 分为 $a(M)-1$ 个部分，总至少有一个部分的直径等于 $d(M)$. 例如 M 为圆时，$a(M)=3$. M 为平行四边形时，$a(M)=2$ (图 4.17).



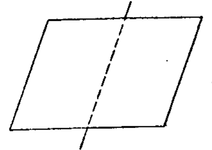


图 4.17

[例 9] 证明对于凸形 M, $a(M)\leqslant 3$.

解 只要证明 $a(M)\leqslant b(M)$.

设 M 被 $b(M)=n$ 个较小的位似图形 M_1、M_2、…、M_n 覆盖，那么 M 被分为 n 个部分 $M_i'=M_i\cap M\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$，每个部分的直径

$$d(M_i')\leqslant d(M_i)<d(M).$$

因此 $a(M)\leqslant n$. 证毕.

可以证明更强的结论：每一个直径为 1 的点集能分成三个直径 $\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的点集(参见习题 61).

§5 密　　度

在一张方桌上放1分的硬币(同样大小的圆)，这些硬币不相重叠，这时比值

$$\frac{\text{硬币的面积的和}}{\text{方桌的面积}}=\frac{\text{硬币的个数}\times 1\text{个硬币的面积}}{\text{方桌的面积}}$$

可以用来表示桌上的硬币的疏密程度．这也就是本节所要讨论的密度．

当然，桌子的形状也可以是圆或其他的凸形．硬币也可以换成其他的形状：三角形、正方形或其他凸形，但我们主要讨论圆．

定义1 设在凸形 M 中有一组凸形 G_1、G_2、…、G_n，则 G_1、…、G_n 的面积之和与 M 的面积的比值

$$D=\frac{G_1+G_2+\cdots+G_n}{M}$$

称为这一组凸形 G_1、G_2、…、G_n 的密度．

本节的中心问题是：密度的值可以大到什么范围．直观地说，就是一定面积的桌子上最多可以无重叠地嵌入多少分币．很显然，将硬币无重叠地放在桌上是不能把桌子覆盖的，即对于任一组无重叠地嵌入方桌的硬币，总有密度 $D<1$．1这个上界当然是太弱了，在本节我们要证明一个精细的结论：$D<\frac{\pi}{\sqrt{12}}$，即证明以下定理．

定理1 如果在凸形 M 内无重叠地嵌入 n 个半径为1的圆，$n>1$，那么这组圆的密度小于 $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$，即

$$n < \frac{1}{\sqrt{12}} M. \tag{1}$$

我们将通过下面的例 1 到例 4 来证明(1)式.

[例 1] 已知在凸多边形 M 中嵌入 n 个相等的无重叠的圆，证明可以把多边形 M 分为 n 个凸多边形，每个凸多边形恰好覆盖一个圆.

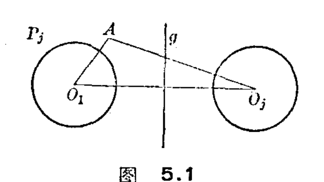


图 5.1

解 设嵌入的 n 个圆为 $\odot O_1$、$\odot O_2$、…、$\odot O_n$.

考虑 $\odot O_1$ 及 $\odot O_j$ $(2 \leqslant j \leqslant n)$. 作 O_1O_j 的垂直平分线 g, g 将平面分为两个部分，覆盖 $\odot O_1$ 的那个闭半平面记为 P_j，则显然 P_j 是具有下述性质的点 A 的集合：$AO_1 \leqslant AO_j$.

闭半平面 P_2、P_3、…、P_n 的交(落在 M 中的部分)是一个凸多边形 M_1. 因为 $P_j (2 \leqslant j \leqslant n)$ 覆盖 $\odot O_1$, 所以 M_1 覆盖 $\odot O_1$. M_1 是 M 中具有下述性质的点 A 的集合：$AO_1 \leqslant AO_j$ $(j=2, 3, \cdots, n)$.

同样地，我们可以作出凸多边形 $M_i \supset \odot O_i (i=2, \cdots, n)$, M_i 是具有下述性质的点 A 的集合：$AO_i \leqslant AO_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i)$.

显然平面上每一个点至少属于一个凸多边形 $M_i (i=1, 2, \cdots, n)$. M 被分为 n 个凸多边形 $M_1, M_2, \cdots, M_n$, 每个 M_i 恰好覆盖一个圆. 解毕.

用同样的方法可知，如果在凸形 M 中嵌入 n 个半径为 1 的圆 $\odot O_1$、$\odot O_2$、…、$\odot O_n$, 那么可以把 M 分为 n 个凸形 M_1、M_2、…、M_n, 每个凸形 M_i 恰好覆盖一个圆 $\odot O_i$. 这里 M_i 是 M 中具有性质 $AO_i \leqslant AO_j$ $(1 \leqslant j \leqslant n, j \neq i)$ 的点 A 组成的集合. 我们把这样的 M_i 称为 $\odot O_i$ 的外壳(图

5.2).

因为凸形 M 覆盖 $\odot O_1$、$\odot O_2$、…、$\odot O_n$ 的凸包，我们可以假定 M 就是这 n 个圆的凸包，在这个假定下去证明(1)式成立.

外壳 M_1、M_2、…、M_n 可以分为两类. 第一类外壳的边界完全由 O_iO_j 这样的线段的垂直平分线组成. 第二类外壳的边界中除了这类垂直平分线外，还有 M 的一部分边界，它们是圆弧或者两个圆的外公切线(参见图 5.3).

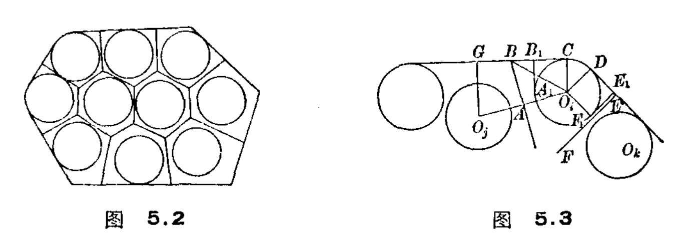


图 5.2　　　　图 5.3

[例 2]　在 $n>1$ 时，每个第二类外壳的面积 $M_i>\sqrt{12}$.

解　如图 5.3，设 M_i 的边界为 AB、BC、$\overset{\frown}{CD}$、DE、EF 等等，其中 BC、DE 是 $\odot O_i$ 的切线，也是 M 的边界，AB、EF 分别是 O_iO_j、O_iO_k 的垂直平分线.

由于 O_j 到 BC 的距离 $O_jG\geqslant 1=O_iC$，易知 $\angle O_iO_jG\leqslant 90°$，又由 $\angle O_iAB=\angle O_jGB=90°$ 得 $\angle ABC=\angle O_iO_jG\leqslant 90°$，从而 $\angle O_iBC\leqslant\frac{1}{2}\angle ABC\leqslant 45°$，$CB\geqslant CO_i=1$. 在 CB 上取 B_1，使 $CB_1=1$. B_1 与 $\odot O_i$ 的凸包是 $\odot O_i$ 戴上一顶“直角帽子”，即由 $\odot O_i$ 及切线 B_1C、B_1A_1 围成，A_1 是 B_1A_1 与 $\odot O_i$ 的切点(由于 $B_1C=O_iC$，易知 $B_1A_1\perp B_1C$ 并且四边形 $O_iA_1B_1C$ 是正方形)，这顶直角帽子完全在凸形 M_i 中.

同样，可以在线段 DE 上取 E_1，使 $DE_1=1$. 再过 E_1 作

两条 $\odot O_i$ 的切线，构成 $\odot O_i$ 的另一顶直角帽子.

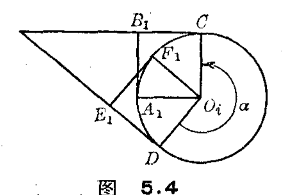


图 5.4

这两顶直角帽子不相重叠，否则如图 5.4，将有

$$\alpha > 360^\circ - \angle CO_iA_1 - \angle F_1O_iD$$
$$= 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ$$
$$= 180^\circ.$$

从而 M 中不能再嵌入其他的圆，这与 $n>1$ 矛盾.

于是，有(图 5.3)

$$M_i \geqslant \odot O_i \text{与两个直角帽子的面积之和}$$
$$= \text{正方形} O_iA_1B_1C + \text{正方形} O_iDE_1F_1$$
$$+ \text{扇形} CO_iD + \text{扇形} A_1O_iF_1$$
$$= 1+1+\frac{\pi}{2} = 2+\frac{\pi}{2} > \sqrt{12}.$$

为了证明第一类外壳的面积 $\geqslant\sqrt{12}$，我们先作一点准备.

[例 3] 如果在 $\odot(0, 1)$ 与 $\odot\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 所构成的环(即满足 $1\leqslant OA\leqslant\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的点 A 所成的集)中有 n 个点 A_1、A_2、…、A_n，每两个点间的距离大于或等于1，那么 $n\leqslant 7$，并且 $\angle A_iOA_j\geqslant 51^\circ 19'$.

解 先证明一个引理.

引理 在 $x\geqslant c\geqslant 0$ 时，$x+\frac{c^2}{x}$ 是 x 的增函数.

证明 设 $x_2\geqslant x_1\geqslant c$，则

$$x_2+\frac{c^2}{x_2}-\left(x_1+\frac{c^2}{x_1}\right)=(x_2-x_1)+\frac{c^2(x_1-x_2)}{x_1x_2}$$
$$=\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}(x_1x_2-c^2)\geqslant 0.$$

引理证毕.

如果 $\frac{2}{\sqrt{3}} \geqslant r_1$, $r_2 \geqslant 1$, $a \geqslant 1$, 那么 $r_1^2+1 \geqslant 1^2+1=2>\frac{4}{3} \geqslant r_2^2$, 所以 $r_1 > \sqrt{r_2^2-1}$. 于是可用引理, $r_1+\frac{r_2^2-1}{r_1} \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{r_2^2-1}{2/\sqrt{3}}$, 所以

$$\begin{aligned}\frac{r_1^2+r_2^2-a^2}{2r_1r_2} &\leqslant \frac{r_1^2+r_2^2-1}{2r_1r_2}=\frac{1}{2r_2}\left(r_1+\frac{r_2^2-1}{r_1}\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2r_2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{r_2^2-1}{2/\sqrt{3}}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\left(r_2+\frac{1}{3r_2}\right)\\ &\leqslant \frac{\sqrt{3}}{4}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1/3}{2/\sqrt{3}}\right)=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

因而
$$\cos\angle A_iOA_j=\frac{OA_i^2+OA_j^2-A_iA_j^2}{2OA_i\cdot OA_j} \leqslant \frac{5}{8},$$
$$\angle A_iOA_j \geqslant 51°19'.$$

由于
$$360° \div 51°19' < 8,$$

所以
$$n \leqslant 7.$$

如果只要证明 $n \leqslant 7$, 还有一种较为简单的方法, 即证明: 所述环内的八个点中一定有两个点之间的距离 $\leqslant \odot\left(0, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 的内接正八边形的边长 <1, 参看习题 42.

[例 4] 每个第一类外壳的面积 $M_i \geqslant \sqrt{12}$.

解 我们知道 $\odot(O_i, 1)$ 的外切正六边形 N 的面积为 $\sqrt{12}$, 因此只要证明 $M_i \geqslant N$. 我们甚至可以证明更强的结论, 即 $M_i \cap \odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right) \geqslant N$. 这里的 $\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 恰好是 N 的外接圆.

自 O_i 向 M_i 的边界作垂线. 由于 M_i 是第一类外壳, 所以垂足 A_j、A_k 等分别是 O_iO_j、O_iO_k 等的中点, 从而每两个垂足之间的距离 $A_jA_k=\frac{1}{2}O_jO_k \geqslant 1$ (图 5.5).

显然 $O_iA_j\geqslant 1$，根据例 3，在 $\odot(O_i, 1)$ 及 $\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 所构成的圆环中至多有 7 个垂足 A_j.

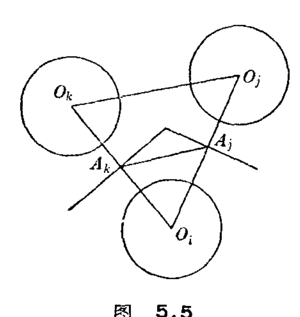


图 5.5

如果在 $\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$中的垂足个数 $q\leqslant 6$，那么 $M_i\cap\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 不小于从 $\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 中减去 $q\leqslant 6$ 个弓形后剩下的面积，每个弓形的弦到圆心 O_i 的距离 $O_iA_j\geqslant 1$. N 是从 $\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$中减去 6 个弓形而形成的图形，这时每个弓形的弦到 O_i 的距离为 1，因此 $M_i\cap\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\geqslant N$（这是我们在 § 1 例 6 中已经采用过的方法）.

如果在 $\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$中的垂足个数 $q=7$，我们设这七个垂足为 A_1、A_2、…、A_7，并且半径 O_iA_1 逆时针转动时顺次通过 A_1、A_2、…、A_7.

根据例 3，$\angle A_jO_iA_{j+1}\geqslant 51°19'$ ($j=1, 2, \cdots, 7$，并约定 A_8 即 A_1)，所以 $\angle A_jO_iA_{j+1}\leqslant 360°-6\times 51°19'=52°6'$. 又因为 $A_jA_{j+1}\geqslant 1$，所以

$$O_iA_j^2+O_iA_{j+1}^2-2\cdot O_iA_j\cdot O_iA_{j+1}\cos 52°\,6'\geqslant A_jA_{j+1}^2\geqslant 1. \tag{2}$$

我们指出在条件(2)及

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\geqslant O_iA_j,\ O_iA_{j+1}\geqslant 1 \tag{3}$$

的限制下，可以得出 O_iA_j, $O_iA_{j+1}\geqslant 1.121$. 最方便的办法是利用图 5.6. 图中曲线 c 的方程是 $x^2+y^2-2xy\cos 52°6'=1$.

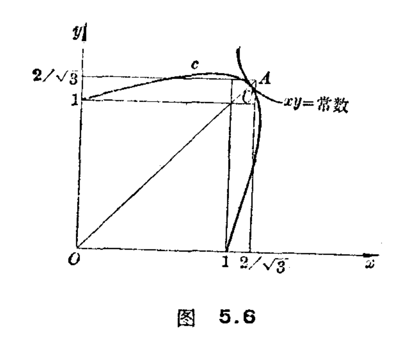


图 5.6

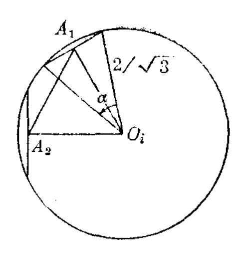


图 5.7

由这个图可以看出，满足条件 $\frac{2}{\sqrt{3}}\geqslant x, y\geqslant 1$ 及 $x^2+y^2-2xy\cos 52°6'\geqslant 1$ 的点(x, y)只能在以 A 为顶点的一个小曲边三角形中．若 c 与 $x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ 交于 C，则 $y(x)$ 的值至少为 C 点的纵坐标，而 C 点纵坐标满足

$$y^2-\frac{4}{\sqrt{3}}y\cos 52°6'+\frac{1}{3}=0.$$

解得 $y\approx 1.121$．因而 $OA_j\geqslant 1.121\,(j=1, 2, \cdots, 7)$．

从 $\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$中减去 7 个弓形，每个弓形的弦与圆心 O_i 的距离 $O_iA_j\geqslant 1.121$，这时剩下的面积是

$$\pi\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\frac{7}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2(\alpha-\sin\alpha)\geqslant 4.10,$$

其中 $\alpha\leqslant 2\arccos\frac{1.121}{2/\sqrt{3}}\approx 30°27'46''$(图 5.7)．

因而 $M_i\cap\odot\left(O_i, \frac{2}{\sqrt{3}}\right)\geqslant 4.10>3.47\approx\sqrt{12}=N$．证明毕．

通过计算七边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 的面积，也可以导出这一结论，参见习题 96.

由例 2、例 4, 我们得到

$$M=M_1+M_2+\cdots+M_n>n\sqrt{12},$$

因而定理 1 成立.

现在我们将例 1 推广一下.

[例 5]　如果在凸多边形 M 中无重叠地嵌入 n 个圆(不一定相等), 那么可以将 M 分为 n 个凸多边形, 每个凸多边形恰好覆盖一个圆.

我们先介绍一下根轴的概念.

定义 2　设 $\odot(O, r)$ 与 $\odot(O', r')$ 为已知, 满足条件

$$AO^2-r^2=AO'^2-r'^2 \qquad (4)$$

的点 A 的集称为 $\odot(O, r)$ 与 $\odot(O', r')$ 的根轴.

图 5.8

在点 A 可以向 $\odot(O, r)$ 及 $\odot(O', r')$ 引切线时, AO^2-r^2, $AO'^2-r'^2$ 分别为 A 到 $\odot(O, r)$ 与 $\odot(O', r')$ 所引切线长的平方, 因此根轴也常常说成是到两个圆的切线相等的点集.

设点 A 在根轴上, A 在 OO' 上的射影为 B, 那么

$$\begin{aligned} r^2-r'^2&=AO^2-AO'^2=BO^2-BO'^2=OO'\times(OB-BO') \\ &=2OO'\times CB, \end{aligned}$$

其中 C 为 OO' 中点(图 5.8).

因此 $CB=\dfrac{r^2-r'^2}{2OO'}$, B 为 OO' 上一个确定的点, 根轴上的每一点都在过 B 点的、OO' 的垂线 g 上.

反过来, 设 A 为垂线 g 上一点, 则由上面的过程逆推上去, 即知 A 满足(4). 所以 $\odot(O, r)$ 与 $\odot(O', r')$ 的根轴就是 OO' 的垂线 g.

根轴将平面分为两个部分，在$\odot O$与$\odot O'$不相重叠（外离或外切）时，覆盖$\odot O$的那个闭半平面中的点A满足条件$AO^2-r^2\leqslant AO'^2-r'^2$（请读者自己验证）。

现在我们来解例5.

解 用$\odot O_i$、$\odot O_j$的根轴代替例1中O_iO_j的垂直平分线，我们就可以象例1那样将M分为n个凸多边形M_1、M_2、…、M_n. 每个M_i恰好覆盖一个圆$\odot O_i$，且是M中满足$AO_i^2-r_i^2\leqslant AO_j^2-r_j^2$的点$A$的集合$(1\leqslant j\leqslant n,\ j\neq i)$.

把"凸多边形"改为"凸形"，还有一些有趣的结论，如：

(1) 在凸形M中去掉m个互不重叠的圆（不一定相等）后剩下的部分记为G，再在G内无重叠地嵌入n个全等的圆，如果这n个圆不比前面m个圆中任一个大，那么这n个圆的总面积$<\frac{\pi}{\sqrt{12}}G$.

(2) 设K为能嵌入凸形M中的最大的圆. 如果在M中无重叠地嵌入n个圆（大小不一定相同），那么M中未被这n个圆覆盖的面积G满足不等式

$$\frac{G}{M}\geqslant\left(1-\frac{\pi}{\sqrt{12}}\right)^{n-1}\left[1-\max\left(\frac{\pi}{\sqrt{12}},\ \frac{K}{M}\right)\right],$$

等号当且仅当$\frac{K}{M}\geqslant\frac{\pi}{\sqrt{12}}$、在$M$内只嵌入圆$K$这一个圆时成立.

这两个结论我们就不证明了.

密度的概念还可以加以推广，例如把定义1中的凸形M推广到无界集合. 我们这里只研究最简单的情况，即把大小相等的圆无重叠地嵌入全平面的问题.

定义3 设O为平面上一个定点，凸集G_1、G_2、…在$\odot(O,\ R)$中的那部分面积记为$G_1(R)$、$G_2(R)$、…，则

$$\lim_{R\to+\infty}\frac{G_1(R)+G_2(R)+\cdots}{\pi R^2}$$

称为凸集 G_1、G_2、…在全平面的密度，记为 $D(G)$.

例如在凸集 G_1、G_2、…无重叠地覆盖全平面时，

$$D(G)=1.$$

[例 6] 在平面中无重叠地嵌入一组相等的圆，那么这组圆的密度 $D(G)\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{12}}\approx 90.69\%$.

解 不妨设圆 G_1、G_2、…的半径为 1，用例 1 的方法作每个圆的外壳 M_i, 根据例 4, $M_i\cap\odot\left(O_i,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\geqslant\sqrt{12}$, 因而

$$\frac{G_i(R)}{M_i\cap\odot(O_i,\ 2/\sqrt{3})}\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{12}}. \tag{5}$$

设与 $\odot(O,R)$ 有公共点的圆为 $\odot(O_{i_1},1)$, $\odot(O_{i_2},1)$, ….
显然有 $\odot\left(O,R+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)\supset\odot\left(O_{i_k},\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$, 于是

$$D(G)=\lim_{R\to+\infty}\frac{G_1(R)+G_2(R)+\cdots}{\pi R^2}$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\frac{G_1(R)+G_2(R)+\cdots}{\pi\left(R+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}\cdot\lim_{R\to+\infty}\frac{\pi\left(R+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}{\pi R^2}$$

$$=\lim_{R\to+\infty}\frac{G_1(R)+G_2(R)+\cdots}{\pi\left(R+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\leqslant\lim_{R\to+\infty}\frac{G_{i_1}(R)+G_{i_2}(R)+\cdots}{M_{i_1}\cap\odot(O_{i_1},2/\sqrt{3})+M_{i_2}\cap\odot(O_{i_2},2/\sqrt{3})+\cdots}$$

$$\leqslant\frac{\pi}{\sqrt{12}}.$$

最后一步是根据(5)式及不等式 $\frac{a_1+a_2+\cdots}{b_1+b_2+\cdots}\leqslant\max\frac{a_i}{b_i}$.

例 6 中的等号是可成立的，例如图 5.9，每一个圆恰好是它的外壳(这圆的外切正六边形)的 $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$，因此 $D(G)=\frac{\pi}{\sqrt{12}}$. 由此可见，定理 1 中的 $\frac{\pi}{\sqrt{12}}$ 是不能再改善了.

上面讨论的内容可以称为最密的(无重叠的)嵌入. 类似地，可以讨论最稀的覆盖. 我们有下面的定理:

定理 2 如果 $n(n>1)$ 个相等的圆覆盖了一个凸形 M，那么

$$D'=\frac{n\text{ 个圆面积之和}}{M}\geqslant\frac{2\pi}{\sqrt{27}}\approx 120.9\%.$$

这里的 D' 称为*覆盖密度*.

定理 2 的证法大体上与定理 1 相同.

我们也可以定义全平面的覆盖密度，并且证明对于一组覆盖全平面的等圆，这密度 $\geqslant\frac{2\pi}{\sqrt{27}}$. 在圆的位置如图 5.10 时，等号成立.

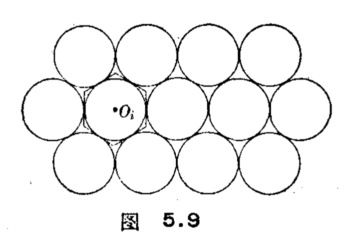


图 5.9

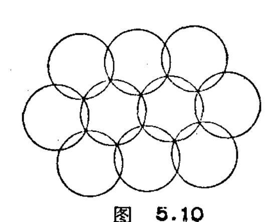


图 5.10

§6 海莱(Helly)定理及其应用

海莱定理是凸集问题中一个极为重要的定理，这个定理是奥地利数学家海莱(Eduard Helly)首先发现的.

定理 1 (海莱)　在平面上，设 M_1、M_2、…、M_n $(n \geqslant 3)$ 是凸集，如果其中每三个集都有公共点，那么这 n 个凸集有公共点.

证明　海莱定理有各种不同的证法，这里只介绍最常见的一种.

对凸集的个数 n 用归纳法. $n=3$ 时，命题显然成立. 假设命题对于 $n=k(k \geqslant 3)$ 成立，我们证明命题对于 $n=k+1$ 成立，即设 M_1、M_2、…、M_{k+1} 为 $k+1$ 个凸集，其中每三个有公共点. 要证明这 $k+1$ 个凸集有公共点.

由于 k 个凸集 M_2、M_3、…、M_{k+1} 中每三个有公共点，根据归纳假设，这 k 个凸集有公共点 A_1. 同样，M_1、M_3、…、M_{k+1} 有公共点 A_2，M_1、M_2、M_4、…、M_{k+1} 有公共点 A_3，M_1、M_2、M_3、M_5、…、M_{k+1} 有公共点 A_4.

如果 A_1、A_2、A_3、A_4 这四个点中有相同的，比如说 A_1 与 A_2 相同，那么 A_1 就是 M_1、M_2、…、M_{k+1} 的公共点，命题成立.

如果 A_1、A_2、A_3、A_4 这四个点互不相同，考虑它们的凸包 H. 在§4中已经指出这时有三种情况(参见图 4.2)：

(1) H 为凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$.

这时线段 A_1A_3 与 A_2A_4 相交于一点 A. 因为 $A_1 \in M_2$,

$A_3\in M_2$, M_2是凸形，所以$A\in M_2$. 同理$A\in M_4$、…、M_{k+1}. 又因为$A_2\in M_1$, $A_4\in M_1$, M_1是凸形，所以$A\in M_1$, 同理$A\in M_3$. 因此A是M_1、M_2、…、M_{k+1}的公共点.

(2) H为$\triangle A_1A_2A_3$.

这时因为A_1、A_2、A_3都属于凸形M_4，所以$\triangle A_1A_2A_3\subset M_4$，从而$A_4\in M_4$. 因此$A_4$是$M_1$, M_2, …, M_{k+1}的公共点.

(3) H为一条线段A_1A_2.

这时$A_4\in A_1A_2\subset M_4$，所以A_4是M_1, M_2, …, M_{k+1}的公共点.

证明中的三种情况(1)、(2)、(3)可以统一叙述为：任意四点可以分成两组，这两组的凸包有公共点. 这个命题称为拉登(Radon)定理.

定理1中的n个凸集M_1、M_2、…、M_n可以换成无限多个凸形，即有

定理2 如果无限多个凸形中每三个有公共点，那么这组凸形有公共点.

定理2的严格证明要用到数学分析中的有限覆盖定理，我们这里不介绍了.

值得注意的是定理2中的“凸形”不能改为“凸集”，例如坐标平面上的一组开半平面$x>1$, $x>2$, …，其中每三个都有公共点，但这组开半平面却没有公共点.

海莱定理也可以叙述成下面的形式：

定理1′ 如果$n(n\geqslant3)$个凸集无公共点，那么其中一定有三个凸集无公共点.

定理2′ 如果一组凸形(个数$\geqslant3$)无公共点，那么其中一定有三个凸形无公共点.

海莱定理有各种变形和推广. 比如说在三维空间中有

定理 3 在空间里，如果 n 个凸集 $(n\geqslant 4)$ 中每四个凸集都有公共点，那么这 n 个凸集有公共点.

定理 3 的证明与定理 1 类似.

在把每三个凸集具有的某种性质推广到 n 个凸集时，往往要利用海莱定理，因此这一定理的应用十分广泛. 下面举一些例子来说明海莱定理的应用.

[例 1] 如果 n 个点 O_1、O_2、…、O_n 中每三个点能用一个半径为 r 的圆覆盖，那么这 n 个点能用一个半径为 r 的圆覆盖.

解 分别以这 n 个点为圆心，r 为半径，作 n 个圆 $\odot(O_1, r)$, $\odot(O_2, r)$, …, $\odot(O_n, r)$.

已知点中任意三点 O_i、O_j、O_k 能被一个半径为 r 的圆覆盖，设这圆圆心为 O，则 OO_i、OO_j、OO_k 均 $\leqslant r$. 因此，O 点属于 $\odot(O_i, r)$，$\odot(O_j, r)$，$\odot(O_k, r)$，即这三个圆有公共点.

由于 $\odot(O_1, r)$，$\odot(O_2, r)$，…，$\odot(O_n, r)$ 中任意三个圆有公共点，根据海莱定理，这 n 个圆有一个公共点 K. K 属于 $\odot(O_i, r)$，所以 $KO_i\leqslant r$，即 O_i 属于 $\odot(K, r)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$. $\odot(K, r)$ 就是覆盖 O_1, O_2, …, O_n 的圆.

例 1 中所叙述的命题称为荣格 (Jung) 定理. 借助荣格定理，§3 例 5 中的问题(最小覆盖圆)很容易解决.

[例 2] 点集 M 由 n 个点 O_1、O_2、…、O_n 组成，M 的直径 $\leqslant 1$，证明能用一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆覆盖 M.

解 由 §1 例 2，O_1、O_2、…、O_n 中每三个点能用一个半径 $\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆覆盖. 因此，由荣格定理，O_1、O_2、…、O_n 能用一个半径为 $\frac{\sqrt{3}}{3}$ 的圆覆盖. 证毕.

例 1 与例 2 中的 n 个点都可以改为无限多个点，证明和原来相同，只需要利用定理 2 来代替定理 1 就行了.

从下面的例 3 可以看出海莱定理实际上是一个关于覆盖问题的定理.

[例 3] 已知四个开半平面覆盖全平面，证明可以从中选出三个开半平面仍覆盖全平面.

解 设四个开半平面为 M_1、M_2、M_3、M_4.

考虑 M_1 的补集 $\overline{M}_1$，即平面上不属于 M_1 的那些点组成的集合，显然 $\overline{M}_1$ 是一个闭半平面. 同样，M_2、M_3、M_4 的补集 $\overline{M}_2$、$\overline{M}_3$、$\overline{M}_4$ 也都是闭半平面. 它们都是凸集.

对于平面上任一点 A，因为 M_1、M_2、M_3、M_4 覆盖全平面，所以 A 属于它们中的某一个，比如说，$A\in M_1$.

因为 $A\in M_1$，所以 $A\notin \overline{M}_1$，从而 $A\notin \overline{M}_1\cap\overline{M}_2\cap\overline{M}_3\cap\overline{M}_4$.

由于平面上任意一点都不属于 $\overline{M}_1\cap\overline{M}_2\cap\overline{M}_3\cap\overline{M}_4$，所以 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、$\overline{M}_3$、$\overline{M}_4$ 无公共点. 根据定理 1′，其中必有三个集合无公共点，不妨假设 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、$\overline{M}_3$ 无公共点. 我们证明 M_1、M_2、M_3 覆盖全平面.

事实上，设 B 为平面上任意一点，则 $B\notin \overline{M}_1\cap\overline{M}_2\cap\overline{M}_3$，因此 B 不属于 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、$\overline{M}_3$ 中某一个，不妨设 $B\notin \overline{M}_1$，这时 $B\in M_1$，从而 $B\in M_1\cup M_2\cup M_3$. 因此命题成立.

通过例 3，可以看出，用取补集的方法可以把海莱定理叙述成如下的形式：

定理 4 如果点集 M_1、M_2、…、$M_n(n\geqslant 3)$ 覆盖全平面，并且它们的补集 $\overline{M}_1$、$\overline{M}_2$、…、$\overline{M}_n$ 都是凸集，那么可以从 M_1、M_2、…、M_n 中选出三个集合仍覆盖全平面.

定理 4′ 如果一组点集（点集的个数 $\geqslant 3$）覆盖全平面，并且它们的补集都是凸形，那么可以从这组点集中选出三个点

集，这三个点集覆盖全平面．

定理 4（定理 4′）可以稍加推广，成为下面的定理．

定理 5 设点集 M_1、M_2、…、$M_n(n\geqslant 3)$ 覆盖点集 N，并且差集 $N-M_1$，$N-M_2$，…，$N-M_n$ 都是凸集，则可以从 M_1，M_2，…，M_n 中选出三个点集，这三个点集覆盖点集 N．

定理 5′ 如果一组点集（点集个数$\geqslant 3$）覆盖点集 N，并且从 N 减去其中任一个点集所得到的差集都是凸形，那么可以从这组点集中选出三个点集，这三个点集覆盖点集 N．

定理 5（定理 5′）的证法与例 3 完全相同，只需要把“补集”改为“差集”．

[例 4] 圆周 M 被 n 个半圆周 $M_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 覆盖，证明可以从中选出 3 个半圆周，它们覆盖 M．

解 差集 $M-M_i$ 不是凸集，因此不能直接应用定理 4．

我们用 M 的凸包 $\widetilde{M}$（圆）及 M_i 的凸包 $\widetilde{M}_i$（半圆）来代替 M 及 $M_i(i=1, 2, \cdots, n)$．这时差集 $\widetilde{M}-\widetilde{M}_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 都是凸集．

因为 M_1、M_2、…、M_n 覆盖 M，所以 $\widetilde{M}_1$、$\widetilde{M}_2$、…、$\widetilde{M}_n$ 覆盖 $\widetilde{M}$．根据定理 5，可从中选出三个集合覆盖 $\widetilde{M}$，不妨设 $\widetilde{M}_1$、$\widetilde{M}_2$、$\widetilde{M}_3$ 覆盖 $\widetilde{M}$，这时 M_1、M_2、M_3 覆盖 M．

[例 5] 已知 $n+1$ 个凸集 M_1、M_2、…、$M_n(n\geqslant 3)$ 及 M 具有以下性质：对每三个 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$，存在一个平移，使得点集 M 经过这个平移后被这三个集合的交覆盖，证明一定存在一个平移，使得 M 经过这个平移后被 M_1、M_2、…、M_n 的交覆盖．

解 用 §4 中所说的方法，将平移用坐标平面上的点表示．

设集合 M_i' 为具有这样性质的点（平移）B 所成的集合：

集 M 经过平移 B 后被 M_i 覆盖. 根据 §4 例 4, M'_i 是凸集.

已知对每三个 $M_i(1\leqslant i\leqslant n)$, 存在一个平移, 使得点集 M 经过这个平移后被这三个集合的交覆盖, 因此每三个 $M'_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 有公共点. 由定理 1, M'_1, M'_2, …, M'_n 有公共点 A. 集 M 经过平移 A 后被 M_1、M_2、…、M_n 的交覆盖. 证毕.

例 5 中的"被……覆盖"可以改为"与这三个集合有公共点"及"与这 n 个集合有公共点". 证法同上, 只要利用习题 114. 本节的例 1 是这一命题的特殊情况, 即 M_1、M_2、…、M_n"退化"为点(仅含一点的集)O_1、O_2、…、O_n, 而凸集 M 是半径为 r 的圆.

下面的几个例子需要巧妙地应用海莱定理.

[例 6] $n(\geqslant 3)$ 条平行的线段 M_1、M_2、…、M_n, 如果对于其中任意三条都可以作一条直线和它们相交, 证明可以作一条直线与这 n 条线段都相交.

解 在例 5 中, 为了应用海莱定理, 我们把平移用平面上的点表示, 具有某种性质的平移组成平面上一个凸集. 现在我们需要把直线用点表示.

为此, 建立直角坐标系, 不妨假定已知的 n 条线段与 y 轴平行, 于是 M_i 由这样的点 (x, y) 组成: $x=c_i$, $a_i\leqslant y\leqslant b_i$. 其中 a_i、b_i、c_i 都是常数($i=1, 2, \cdots, n$).

与此同时, 考虑另一个平面. xy 平面上的每一条直线 $y=ux+v$, 可以用 uv 平面上的一个点 (u, v) 表示.

与 M_i 相交的直线 $y=ux+v$, 满足条件

$$a_i\leqslant uc_i+v\leqslant b_i, \tag{1}$$

反过来, 满足(1)的直线 $y=ux+v$ 与 M_i 相交.

在 uv 平面上, 满足(1)的点 (u, v) 组成一个带形 M'_i, 带形的边是直线 $uc_i+v=a_i$ 及 $uc_i+v=b_i$.

根据已知，对于每三条线段 M_i，有一条直线 $y=ux+v$ 与它们相交，即每三个 M'_i 有一个公共点 (u, v). 根据定理 1，全体 M'_i 有一个公共点 (u, v)，这点所表示的直线 $y=ux+v$ 就是与全体 M_i 都相交的直线.

上面的推导可以用下面的表来说明:

xy 平 面		uv 平 面
直线 $y=ux+v$		点 (u, v)
与 $M_i\left\{(x, y): \begin{matrix} x=c_i, \\ a_i\leqslant y\leqslant b_i \end{matrix}\right\}$ 相交的直线的集合		带形 $M'_i\{(u, v): a_i\leqslant uc_i+v\leqslant b_i\}$
每三个 M_i，有一条直线与它们都相交	⟶	每三个带形 M'_i 有公共点
		↓海莱定理
有一条直线与全体 M_i 都相交	⟵	全体带形 M'_i 有公共点

[例 7] 原野上有一群羊站立不动，羊有黑白两种，如果对于每四只羊，都可以用一条直线将其中的黑羊和白羊分开，证明可以用一条直线将这群羊中的黑羊和白羊分开。

解 这个有趣的命题是寇许贝格 (P. Kirchberger) 首先发现的，原来的证明有 24 页长. 采用海莱定理则非常简单.

证法与例 7 基本相同，但由于羊有黑白之分，我们需要把直线写成 $ux+vy+w=0$，而不是 $y=ux+v$，从而要利用一个三维空间的点 (u, v, w) 来与直线对应.

首先，在平面上建立起直角坐标，每只羊可以用它的坐标 (a, b) 来表示.

同时，我们考虑一个三维空间，xy 平面上的每一条直线 $ux+vy+w=0$ 可以用这个空间中的一个点 (u, v, w) 表示. xy 平面上的点 (a, b) 可以用这三维空间中的“半空间” $\{(u,$

$v, w)\{au+bv+w>0\}$ 或 $\{u, v, w|au+bv+w<0\}$ 表示．我们约定，如果(a, b)是白羊的坐标，它对应于 $au+bv+w>0$，如果(a, b)是黑羊的坐标，它对应于 $au+bv+w<0$．这样，这群羊就与三维空间中的一组半空间相对应．

对每 4 只羊，根据已知，有一条直线将其中的黑羊和白羊分开．设这条直线为 $u_0x+v_0y+w_0=0$，我们可以假定白羊的坐标(a, b)满足 $u_0a+v_0b+w_0>0$，而黑羊的坐标 (a', b') 满足 $u_0a'+v_0b'+w_0<0$（否则将直线方程改为 $-u_0x-v_0y-w_0=0$）．这样一来，在三维空间中，点(u_0, v_0, w_0)属于与白羊(a, b)对应的半空间 $au+bv+w>0$，也属于与黑羊(a', b')对应的半空间 $a'u+b'v+w<0$，即与这 4 只羊相对应的 4 个半空间有公共点(u_0, v_0, w_0)．

由于每 4 个半空间都有公共点，所以根据定理 3 这组半空间有公共点(u, v, w)，与这点对应的直线 $ux+vy+w=0$ 可将这群羊分开．这是因为白羊的坐标(a, b)满足 $ua+vb+w>0$，所以在这条直线的一侧．同理，黑羊在另一侧．

上面的证法可以用下表说明：

xy 平面		三维空间
直线 $ux+vy+w=0$		点(u, v, w)
白羊 (a, b)		半空间 $au+bv+w>0$
黑羊 (a, b)		半空间 $au+bv+w<0$
每 4 只羊可以用一条直线分开	⟶	每 4 个半空间有公共点
		↓ 海莱定理
这群羊可以用一条直线分开	⟵	这组半空间有公共点

习　题

1. 已知点集 M 的直径为 d. 证明 M 是有界点集，并且它的覆盖半径 $\frac{d}{2}\leqslant\rho\leqslant d$. 是否一定有 $\rho=\frac{d}{2}$?

2. 试确定 $\square ABCD$ 的覆盖半径.

3. 点集 M 由 100 个点组成. 已知 M 的直径 $d\leqslant 1$，并且以 M 中任意三点为顶点的三角形都是钝角三角形，证明能用一个直径 $\leqslant 1$ 的圆覆盖 M.

4. 点集 M 由 25 个点组成，每三个点中都有两个点的距离小于 1，证明用半径为 1 的圆能覆盖 M 中 13 个点.

5. $\triangle A'B'C'$ 的三条边 a'、b'、c' 分别小于 $\triangle ABC$ 的三条边 a、b、c，证明 $\triangle A'B'C'$ 的覆盖半径 ρ' 小于 $\triangle ABC$ 的覆盖半径 ρ.

6. 设 $\triangle ABC$ 被多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 覆盖，证明 $\triangle ABC$ 的面积一定不大于$\triangle A_iA_jA_k$ $(i, j, k=1, 2, \cdots, n)$中最大的.

7. 证明面积大于 1 的三角形不能被面积等于 2 的平行四边形覆盖.

8. 证明(1)每个面积为 S 的平行四边形能用一个面积为 $2S$ 的三角形覆盖. (2) 每一个覆盖这个平行四边形的三角形的面积 $\geqslant 2S$.

9. 证明周长为 $2s$ 的有界闭集能用一个直径为 s 的圆覆盖.

10. 证明一条长为 1 的曲线能用一个面积为 $\frac{1}{4}$ 的矩形覆盖.

11. 一条曲线长为 l. 证明能用一个直径为 l 的圆覆盖这条曲线.

12. $\odot K$ 与 $\triangle ABC$ 的三条边都相交，证明 $\odot K$ 一定覆盖 $\triangle ABC$ 的内心 I.

13. $\odot K$ 与 $\triangle ABC$ 的三条边都相交， 证明 $\odot K$ 的半径 ρ 不小于 $\triangle ABC$ 的内切圆的半径 r.

14. 设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径为 R，内切圆的半径为 r. 证明 $R\geqslant 2r$. 等号何时成立?

15. $\odot(O, r)$ 的一条弦与它所对的劣弧围成一个弓形. 如果这个弓形被一个边长为 a 的正方形覆盖，问 a 至少多大?

16. 将上题正方形改为正三角形，求 a 的最小值.

17. 一个直角三角形，两条直角边分别为 a、$b(a\geqslant b)$，被一个边长为 x

的正方形覆盖，求 x 的最小值.

18. 一个矩形的两条邻边分别为 a、b $(a\geqslant b)$，被一个边长为 x 的正方形覆盖，求 x 的最小值.

19. 证明边长为 1 的正三角形不能被两个边长 <1 的正三角形覆盖.

20. 证明两个边长 <1 的正方形不能覆盖一个边长为 1 的正方形.

21. 证明三个边长 $<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的正方形不能覆盖一个边长为 1 的正方形.

22. 证明：如果一个矩形能被两个较小的与它相似的矩形覆盖，那么这个矩形一定不是正方形. 反过来，如果一个矩形不是正方形，那么它能被两个较小的与它相似的矩形覆盖.

23. 设 $\triangle ABC$ 的边长 $a\geqslant b\geqslant c$，证明能用两个直径为 b 的圆覆盖 $\triangle ABC$.

24. 两个半径为 r 的圆覆盖一个边长为 1 的正方形 $ABCD$，r 至少多大？

25. 三个半径为 r 的圆覆盖一个边长为 1 的正方形 $ABCD$，r 至少多大？

26. 两个边长为 a 的正方形覆盖一个半径为 1 的圆，a 至少多大？如果将两个改为三个或四个，a 至少为多大？

27. 两个边长为 a 的正三角形覆盖一个半径为 1 的圆，a 至少多大？

28. 设 $\odot O$ 半径为 r，证明任意一个周长为 l，面积为 lr 的凸多边形能覆盖 $\odot O$.

29. 已知 $\triangle ABC$ 是锐角三角形，它的外接圆半径为 R，如果 $R\leqslant 1$，那么三个圆：$\odot(A, 1)$，$\odot(B, 1)$，$\odot(C, 1)$ 覆盖 $\triangle ABC$. 反过来，如果 $\odot(A, 1)$，$\odot(B, 1)$，$\odot(C, 1)$ 覆盖 $\triangle ABC$，那么 $R\leqslant 1$.

30. 已知 $\square ABCD$ 中，$AB=a$，$BC=1$，$\angle ABC=\alpha$，$\triangle ABC$ 是锐角三角形. 证明当且仅当 $a\leqslant\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha$ 时，四个圆：$\odot(A, 1)$，$\odot(B, 1)$，$\odot(C, 1)$，$\odot(D, 1)$ 覆盖 $\square ABCD$.

31. 如果 $\odot(O, r)$ 的内接多边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 的各边及对角线 A_iA_j $(1\leqslant i, j\leqslant n)$ 均小于 $\sqrt{3}\,r$，那么这个多边形不覆盖圆心 O.

32. P 为 $\triangle ABC$ 内一点，将 $\triangle ABC$ 的外接圆平行移动（$\triangle ABC$ 保持不动），使得圆心与 P 重合，证明这时的圆至少覆盖 $\triangle ABC$ 的一个

顶点.

33. 点 A、B 在 $\odot O$ 内，证明可以作一个过 A、B 两点的完全在 $\odot O$ 内部的圆.

34. 两条平行线之间的距离为1. 作一个半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆，证明这两条平行线上被这圆覆盖的两条线段的和 $\leqslant 2$.

35. 矩形 $ABCD$ 的长、宽分别为 a、$1(a>1)$，n 为不小于 a 的最小整数，证明 n 个半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆能覆盖这个矩形，而 $n-1$ 个半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆不能覆盖这个矩形.

36. $\triangle ABC$ 为正三角形，$\odot O$ 的半径等于 $\triangle ABC$ 的高. 如果 $\odot O$ 在 BC 上滚动，证明 $\triangle ABC$ 所覆盖的圆弧总是 $60°$.

37. $\odot I$ 是 $\triangle ABC$ 的内切圆，正方形 $DEFG$ 是 $\odot I$ 的外切正方形，证明正方形 $DEFG$ 的边上被 $\triangle ABC$ 覆盖的线段的和大于正方形周长的一半.

38. 证明半径 <2 的圆中不能无重叠地嵌入两个半径为 1 的圆. 半径为 2 的圆中不能无重叠地嵌入三个半径为 1 的圆.

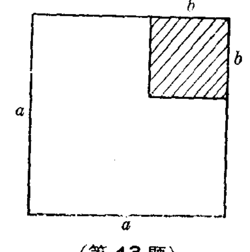
39. 已知 $a<a_1+a_2$，证明边长为 a_1 的正三角形 $A_1B_1C_1$ 与边长为 a_2 的正三角形 $A_2B_2C_2$ 不能无重叠地嵌入边长为 a 的正三角形 ABC 中.

40. 证明一个边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的正五边形不能嵌入边长为 1 的正方形中.

41. 证明圆内任意 8 个点中一定有两个点的距离小于半径.

42. 证明圆内任意 8 个点中一定有两个点的距离小于圆内接正七边形的边长 a_7.

43. 在一个边长为 a 的正方形空地的角上造了一个边长为 $b(b<a)$ 的正方形屋子. 如果要在剩下的空地上再造一个正方形的车库，问这车库的面积最大为多少?



(第 43 题)

44. 正方形 M_1、M_2、…的面积的和为 1，边长分别为 a_1、a_2、…，$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots$，证明

这些正方形能无重叠地嵌入一个边长为 $\sqrt{2}$ 的正方形 N 中.

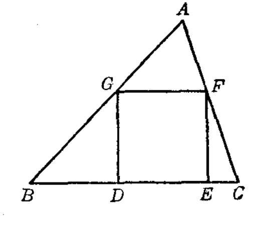
45. 边长分别为 1、$\frac{1}{\sqrt{2}}$、$\frac{1}{\sqrt{3}}$、… 的正方形能无重叠地嵌入一个边长为 10 的正方形中吗?

46. 在一个长、宽分别为 25、20 的矩形中已经嵌入 120 个边长为 1 的正方形,证明在这个矩形中,一定能再嵌入一个直径为 1 的圆与上述正方形无重叠.

47. 正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的边长为 1,在其中嵌入一个三角形. 问这个三角形的面积至多为多大?

48. 正六边形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 的边长为 1, 在其中嵌入一个三角形,三角形的一边与 A_1A_2 平行. 问这个三角形的面积至多为多大?

49. 图中正方形 $DEFG$ 是 $\triangle ABC$ 的内接正方形,边长为 a. 又设 $\triangle ABC$ 的内切圆为 $\odot(I, r)$, 证明 $\sqrt{2}\,r<a<2r$.



(第 49 题)

50. 边长为 10 的正方形中有 200 个半径为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的圆. 证明其中一定有四个圆有公共点.

51. 在边长为 1 的正方形中嵌入一个面积大于 $\frac{1}{2}$ 的凸多边形 M,证明总能找到一条直线 l, 平行于正方形的一条边,并且被 M 所截得的线段大于 $\frac{1}{2}$.

52. 在边长为 1 的正方形内嵌入一个长度大于 1000 的自身不相交的折线 M. 证明总能找到一条直线 l,平行于正方形的一边, 并且与折线 M 的交点的个数大于 350.

53. $\odot O$ 的半径为整数 n. 圆内有 $4n$ 条长为 1 的线段. 证明对任一条直线 l, 总能作一条直线 l' 至少与两条已知线段相交, 并且 l' 与 l 平行或垂直.

54. 在边长为 100 的正方形 $ABCD$ 中嵌入 n 个半径为 1 的圆. 如果正方形内任意一条长为 10 的线段至少与一个圆相交,证明 $n\geqslant 400$.

55. 证明可以在立方体上打个洞, 使同样大小的立方体能够从这个洞里通过.

56. 证明可以在正四面体上打个洞，使同样大小的正四面体能够从这个洞里通过。

57. 一只甲虫从 A_0 点出发，沿直线前进，每爬行 1 厘米后就向左转. 如果每次转过的角度 $\theta_i(i=1, 2, \cdots)$不小于 $60°$，并且 $\theta_1 \leqslant \theta_2 \leqslant \cdots < 120°$，证明不论这只甲虫走了多久，它永远在以 A_0 为圆心，3 厘米为半径的圆内.

58. 用有限多个抛物线及其内部（含有抛物线焦点的那个平面区域）能不能覆盖整个平面？

59. 设 n 个带形的宽度分别为 b_1、b_2、$\cdots$、b_n. 如果

$$b_1+b_2+\cdots+b_n<d,$$

证明这些带形不能覆盖直径为 d 的圆.

60. 证明每个直径为 1 的点集能被三个直径为 1 的圆覆盖，也能被四个直径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$的圆覆盖.

61. 证明每一个直径为 1 的点集能分为三个直径 $\leqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$ 的点集，举例说明 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 不能改为更小的数.

62. 一个带形覆盖一个边长为 1 的正方形，证明带形的宽 $b \geqslant 1$.

63. n 个相等的圆，每两个圆有公共点，证明能用三颗图钉把它们完全钉住.

64. 已知六个圆，每一个圆都没有覆盖其他的圆的圆心，证明用一颗图钉不能把这六个圆全部钉住.

65. 已知一族半径为 r 的圆 K_0、K_1、$\cdots$、K_n，如果每一个都与 $\odot K_0$ 有公共点，证明能用七颗图钉把这些圆全部钉住.

66. 证明上题的“七”不能改为更小的数.

67. 已知边长为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的正六边形 $ABCDEF$. 有一组半径为 1 的圆，圆心在这个正六边形中，证明能用三颗图钉把这些圆全部钉住.

68. 已知直径为 1 的点集 M 被一个边长为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的正六边形 $ABCDEF$ 覆盖，证明可以截去六边形 $ABCDEF$ 的某两个不相邻的角，剩下的部分仍能覆盖点集 M.

69. 所有的圆心在凸多边形 M 内、半径为 r 的圆的并集，称为 M 的距

离为 r 的平行点集，记为 $M(r)$. 证明这个平行点集的面积为 $M(r)=M+lr+\pi r^2$，其中 l 为 M 的周长.

70. 有限多个正方形覆盖的面积为 S，证明可以从中取出一组两两无公共点的正方形，它们覆盖的面积 $>\dfrac{S}{4\sqrt{2}+2\pi+1}$.

71. 在 x 轴上有有限个区间，覆盖的长度为 1，证明可以从中取出一组两两无公共点的区间，覆盖的长度 $>\dfrac{1}{2}$.

72. 已知 $\odot(A, r_1)$，$\odot(B, r_2)$，$\odot(C, r_3)$ 有公共点 P，证明(1)这三个圆一定有一个公共点属于 $\triangle ABC$. (2) $\triangle ABC$ 的覆盖半径 ρ 不大于 r_1、r_2、r_3 中最大的.

73. $\triangle A'B'C'$ 的边分别小于 $\triangle ABC$ 的对应边，如果 $\odot(A, r_1)$、$\odot(B, r_2)$、$\odot(C, r_3)$ 有公共点，证明 $\odot(A', r_1)$、$\odot(B', r_2)$、$\odot(C', r_3)$ 也有公共点，并且这三个圆覆盖 $\triangle A'B'C'$.

74. 五个直径为 d 的点集能覆盖一个边长为 1 的正方形，求 d 的最小值.

75. 证明对于每一棵树，总能从它的全部树叶中摘去 $\dfrac{8}{15}$，使得剩下的树叶的阴影不小于原来阴影的 $\dfrac{7}{15}$（假定树叶数是 15 的倍数. 树干与树枝的阴影可以忽略不计）.

76. 圆周上有若干条弧，总长 $<\dfrac{1}{2}$ 圆周. 证明在圆周上一定能找到一对对径点 A、A'，A 与 A' 都不在已给的弧中.

77. 已知两个周长为 1983 的圆周，在一个圆周上给定 1983 个点，在另一个圆周上给定若干条弧，这些弧的总长小于 1. 证明一定能把两个圆周重叠起来，使得任一个给定的点都不落在给定的弧内.

78. 已知凸五边形 M_0 的五个顶点为 A_0、A_1、A_2、A_3、A_4，设在将 A_0 平移到 A_i 时，五边形 M_0 成为五边形 M_i ($i=1, 2, 3, 4$). 证明五边形 M_0、M_1、M_2、M_3、M_4 一定有重叠部分.

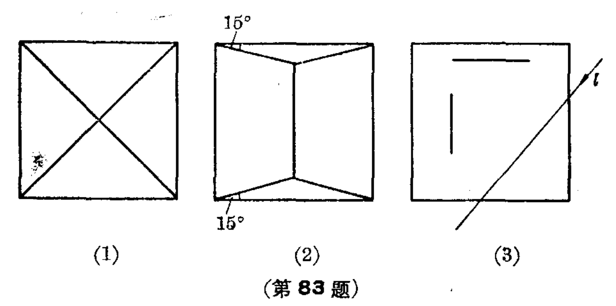
79. 面积为 5 的矩形中，有 9 个面积为 1 的矩形. 证明这 9 个矩形中一定有两个矩形，它们的公共部分的面积 $\geqslant\dfrac{1}{9}$.

80. 平面上有若干个(个数可以为无穷)圆，半径之和为有限数，证明可以作一个以原点 O 为中心的圆周，与每一个已知圆没有公共点.

81. 对(0, 1)中的每个有理点 $\frac{p}{q}$(p、q为互素的自然数)作一个以 $\frac{p}{q}$ 为中心，长为 $\frac{1}{2q^2}$ 的区间，证明 $\frac{\sqrt{2}}{2}$ 不被这些区间覆盖.

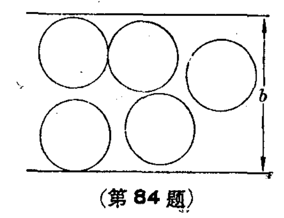
83. 已知点集 M 中每三点不共线，并且构成的三角形的面积$\leqslant 1$. 证明能用一个面积为 4 的三角形覆盖点集 M.

83. 在边长为 1 的正方形中嵌入一些线段，称为"墙". 如果每一条穿过正方形的直线——"光线"都被"墙"挡住，即至少与一条线段有公共点，我们就说这组"墙"是"不透光的". 下面的图(1)、(2)中的墙是"不透光的"，(3) 不是"不透光的". 注意"不透光的"墙不一定要由相连的线段组成. 在图(1)中"墙"的总长为 $2\sqrt{2}\approx 2.828$，图(2)中"墙"的总长为 $1+\sqrt{3}\approx 2.732$. 试求一组"不透光的"墙，其总长$<1+\sqrt{3}$.



(第 83 题)

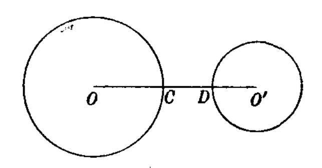
84. 在一个带形中无重叠地嵌入一组半径为 1 的圆，称这些圆为"云". 如果每一条与带形相交的直线至少与 k 个圆有公共点，我们就说云有 k 层. 证明如果云有两层，那么带形的宽 $b\geqslant 2+\sqrt{3}$.



(第 84 题)

85. 在边长为 1 的正方形内，能否嵌入一些圆，这些圆的半径的和 $\geqslant$ 1983.

86. 证明任意给定的 100 个点能用一些圆覆盖，这些圆的直径的和 $<$ 100，并且每两个圆之间的距离 >1（两个集合 M、N 之间的距离是



（第 86 题）

指线段 AB 的最小值，其中 A 为点集 M 中任意一点，B 为点集 N 中任意一点．不难看出上图 $\odot O$ 与 $\odot O'$ 之间的距离是 CD，其中 C、D 分别为线段 OO' 与 $\odot O$、$\odot O'$ 的交点．当 $\odot O'$ 缩为一点 D 时，DC 就是点 D 到 $\odot O$ 的距离）.

87. 在 $\odot(O,\ 1)$ 上最多能"附着"（即与 $\odot(O,\ 1)$ 外切）多少个半径为 1 的圆，这些圆中任意两个不相重叠？

88. 在 $\odot(O,\ 1)$ 上最多能"附着"多少个半径为 1 的圆，这些圆中任何一个不覆盖其他圆的圆心？

89. 在边长为 1 的正方形上最多能"附着"（即与这个正方形有公共点但不重叠）多少个边长为 1 的正方形，其中每两个无重叠部分？

90. 已知三个圆 $\odot(O_1,\ 1)$，$\odot(O_2,\ 1)$，$\odot(O_3,\ 1)$ 的圆心距满足

$$O_1O_2^2+O_2O_3^2+O_3O_1^2<6,$$

证明可以用一颗图钉把这三个圆同时钉住.

91. 平面上有 n 个圆（$n\geqslant 2$），它们的交集为空集，证明存在一个圆，无论将它怎样移动，都不可能与这 n 个圆都有公共点.

92. 已知 n 个圆（$n\geqslant 2$），证明可以作一个"检验圆"，具有这样的性质：将这圆在平面上移动，如果在某一位置，已知圆中有 k 个圆，每一个圆与它有公共点，那么这 k 个已知圆一定有公共点.

93. 利用西涅日耳曼定理证明每一个周长小于 4 的凸形可以放到坐标平面上，不覆盖任一个格点.

94. 证明凸形 M 能被一个面积 $\leqslant 2M$ 的矩形覆盖.

95. 设 P_n 为 $\odot O$ 的面积最大的内接 n 边形，Q_n 为 $\odot O$ 的面积最小的外切 n 边形，证明

$$P_{n-1}+P_{n+1}\leqslant 2P_n,\ Q_{n-1}+Q_{n+1}\geqslant 2Q_n.$$

并将结果推广到一般的凸形.

96. 已知在 $\odot(O,1)$ 与 $\odot\left(O,\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ 所构成的圆环内有七个点，每两个点的距离 $\geqslant 1$. 证明以这七个点为顶点的七边形的面积不小于 $2\sqrt{3}$.

97. 在一个大花园里种了 n 棵树，每两棵树之间的距离 $\geqslant 2r$，证明 $n\leqslant\frac{\pi}{2\sqrt{3}r^2}$（树干的粗细可以忽略不计）.

98. 在一片沙漠中设置 n 个生活点，使得沙漠中每一点到最近的生活点的距离不大于 r，证明 $n\geqslant\frac{2\pi}{3\sqrt{3}r^2}$.

99. 已知一组半径为 r 的圆（可以互相重叠），如果平面上未被它们覆盖的部分不能再嵌入半径为 r 的圆，那么这组圆称为满系. 证明满系的密度 $\geqslant\frac{\pi}{\sqrt{108}}$.

100. 已知 $\odot(K_1,\ r)$、$\odot(K_2,\ r)$、…是满系，证明 $\odot(K_i,\ r)$ 的外壳 P_i 是有界的，并且被 $\odot(K_i,\ 2r)$ 覆盖（$i=1,\ 2,\ \cdots$）.

101. 已知凸形 M 内能不重叠地嵌入 a 个半径为 1 的圆，并且 b 个半径为 1 的圆能覆盖 M. 证明 $3b>4a$，除非凸形 M 本身是一个圆，这时 $b=a=1$.

102. x 轴上有 n 个区间 $[a_1,\ b_1]$，$[a_2,\ b_2]$，…，$[a_n,\ b_n]$，每两个区间有公共点，证明这 n 个区间有公共点.

103. 五个圆周中任意四个都有公共点，证明这五个圆周有公共点.

104. 已知 100 个圆，对其中每三个圆都能找到一个点，这点到这三个圆的距离（参见第 86 题）都不大于 1，证明存在一个半径为 1 的圆与这 100 个圆都有公共点.

105. 桌上有 n 个点 A_1、A_2、…、A_n，能用一个半径为 r 的圆覆盖. 如果经过震动，成为点 A'_1、A'_2、…A'_n，每两个点的距离 $A'_iA'_j$ 比原来的距离 A_iA_j 小，证明能用一个半径 $<r$ 的圆将 A'_1、A'_2、…、A'_n 覆盖.

106. 已知两族圆: $\odot(O_1, r_1)$, $\odot(O_2, r_2)$, $\cdots$, $\odot(O_n, r_n)$ 及 $\odot(O_1', r_1)$, $\odot(O_2', r_2)$, $\cdots$, $\odot(O_n', r_n)$, $O_iO_j \geqslant O_i'O_j'(i, j=1, 2, \cdots, n)$, 并且 $\odot(O_1, r_1)$, $\odot(O_2, r_2)$, $\cdots$, $\odot(O_n, r_n)$ 有公共点, 证明 $\odot(O_1', r_1)$, $\odot(O_2', r_2)$, $\cdots$, $\odot(O_n', r_n)$有公共点.

107. 已知无限多个带形中每三个有公共点, 证明全体带形有公共点.

108. 已知 $\odot K_1$、$\odot K_2$、$\cdots$、$\odot K_n$ 及 $\odot K$, 对于 $\odot K_1$、$\odot K_2$、$\cdots$、$\odot K_n$ 中任意三个圆, 都存在一个平移, 使得 $\odot K$ 经过这个平移后覆盖这三个圆, 证明存在一个平移, 使得 $\odot K$ 经过这个平移后覆盖 $\odot K_1$、$\odot K_2$、$\cdots$、$\odot K_n$.

109. 一个圆周上有 n 条弧: $\overparen{A_1B_1}$、$\overparen{A_2B_2}$、$\cdots$、$\overparen{A_nB_n}$(其中可能有优弧), 每两条都有公共点, 证明可以作一条直径, 与每一条弧都相交.

110. 已知 n 个圆, 每两个圆都有公共点, 证明过平面上任一点 O, 总可以作一条直线与每个圆都有公共点.

111. 一个圆周上有 n 条劣弧, 每三条都有公共点, 证明这 n 条劣弧有公共点.

112. 一个圆周上有 n 条弧, 每条弧小于圆周的 $\frac{1}{3}$, 并且每两条弧有公共点, 证明这 n 条弧有公共点.

113. 如果一族凸形中每两个都有公共点, 那么对于任一条直线 l, 都有一条平行于 l 的直线与每个凸形都有公共点.

114. 已知凸集 M、N. N' 是具有以下性质的点 B 所成的集合: 点集 M 经过平移 $\overrightarrow{OB}$ 后与点集 N 有公共点. 证明点集 N' 为凸集.

习题解答概要

1．设 A 为 M 中一点，以 A 为圆心、d 为半径的圆一定覆盖 M，因此 M 为有界点集并且 $\rho\leqslant d$．不一定有 $\rho=\frac{d}{2}$，参见 §3 例 5．

2．设 $\square ABCD$ 中，$AC\geqslant BD$，则覆盖半径为 $\frac{1}{2}AC$．

3．设点集 M 中 A、B 两点的距离最大，对 M 中任一点 C，有 $\angle ACB>90°$，所以 C 在以 AB 为直径的圆内．

4．设 A 点在点集 M 中．如果各点与 A 点的距离都$\leqslant 1$，结论显然成立．如果其中有一点 B 与 A 的距离>1，则由已知，对 M 中任一点 C，AC 或 BC 小于 1，即 C 在 $\odot(A, 1)$ 或 $\odot(B, 1)$ 中，从而 $\odot(A, 1)$ 或 $\odot(B, 1)$ 中至少有一个覆盖点集 M 中 13 个点．

5．如果 $\triangle A'B'C'$ 是钝角三角形，设 $a'\geqslant b'\geqslant c'$，则由 §1 例 2，

$$\rho'=\frac{1}{2}a'<\frac{1}{2}a\leqslant\rho.$$

如果 $\triangle A'B'C'$ 与 $\triangle ABC$ 都不是钝角三角形，那么由于两个三角形的内角和相等，$\triangle A'B'C'$ 中有一个角不小于 $\triangle ABC$ 中对应的角，不妨设 $\angle A'\geqslant\angle A$，由 §1 例2，

$$\rho'=\frac{a'}{2\sin A'}<\frac{a}{2\sin A}=\rho.$$

如果 $\triangle A'B'C'$ 不是钝角三角形，而 $\triangle ABC$ 是钝角三角形．设 c 为 $\triangle ABC$ 的最大边，则 $c^2\geqslant a^2+b^2$．作一个辅助的直角三角形 $A''B''C''$，其边长 $a''=a$，$b''=b$，$c''=\sqrt{a^2+b^2}$，这个三角形的覆盖半径为 $\rho''=\frac{1}{2}c''\leqslant\frac{1}{2}c=\rho$．又因为 $a'<a''$，$b'<b''$，$c'\leqslant\sqrt{a'^2+b'^2}<\sqrt{a^2+b^2}=c''$，根据上面已证的结果，$\rho'<\rho''$．因此得 $\rho'<\rho$．

6．当三角形的一个顶点沿一条线段移动时，它的面积在这条线段的一个端点达到最大值（在另一个端点达到最小值），因此可以将 $\triangle ABC$ 的顶点 A 沿一条过 A 的直线移动到多边形的边上，再沿这条边移动到多边形的顶点，而 $\triangle ABC$ 的面积不会减少．

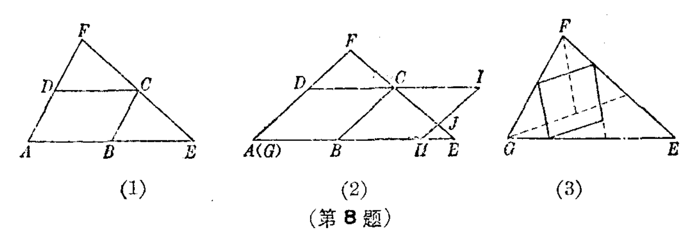
7．由上题，面积为 2 的 $\square ABCD$ 所覆盖的三角形中，$\triangle ABC$ 的面积最大，而$\triangle ABC=1$．

8. (1) 延长$\square ABCD$的边AB到E、AD到F，使$AE=2AB$，$AF=2AD$，则C在EF上，并且$\triangle AEF=2\square ABCD$.

(2) 设$\triangle EFG$覆盖$\square ABCD$. 如果G与A重合，B、C、D分别在GE、EF、FG上，不妨设$EC\geqslant CF$，延长DC到I，使$CI=DC$，又在AE上取H，使$BH=AB$. 设IH与CE交于J，则

$$\triangle EFG=\square ABCD+\square BHIC+\triangle HEJ\geqslant 2\square ABCD.$$

其他情形可以用图(3)所示方法化为这种情形.



(1) (2) (3)

(第 **8** 题)

9. 参见《几何不等式》§1例题9.

10. 参见《几何不等式》§7例题4.

11. 将圆心与曲线的“中点”G(即从端点到G的曲线长为$\frac{l}{2}$)对齐，则曲线上任一点A与O的距离$\leqslant\frac{l}{2}$，因此，$\odot\left(O,\ \frac{l}{2}\right)$覆盖这条曲线. 可以证明用一个直径为$l$的半圆就能覆盖这条曲线. 用一个面积最小的图形去覆盖长为l的曲线是至今未解决的问题.

12. 设$\odot K$分别与BC、CA、AB相交于D、E，F、G，P、Q(如图). 如果I在六边形$DEFGPQ$内，命题显然成立. 如果I不在六边形内，不妨假设I在$\triangle APG$内，设S、T分别为FG、PQ的中点，则$KS\perp FG$，$KT\perp PQ$. 因为

$$\begin{aligned}\alpha<360^\circ-\beta&=360^\circ-(180^\circ-\angle BAC)\\&=180^\circ+\angle BAC=2\left(90^\circ+\frac{1}{2}\angle BAC\right)\\&=2\angle BIC<2\angle QIF,\end{aligned}$$

所以I在$\odot K$内.

(第 **12** 题)

13. K到各边的距离均$\leqslant\rho$，所以

$$\frac{1}{2}\rho a+\frac{1}{2}\rho b+\frac{1}{2}\rho c\geqslant\triangle KBC+\triangle KCA+\triangle KAB\geqslant\triangle ABC$$

$$=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc,$$

从而$\rho \geqslant r$. 当且仅当$\odot K$与内切圆重合时,等式成立.

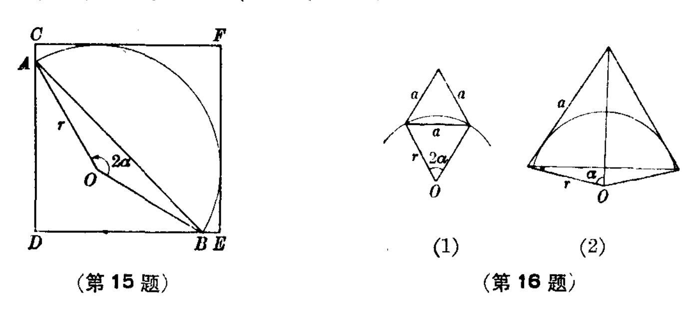
14. 设D、E、F分别为三条边的中点,则$\triangle ABC$与$\triangle DEF$位似,位似中心为重心G,相似比为2:1. 因此$\triangle DEF$的外接圆的半径$\rho=\frac{R}{2}$. 而由上题,$\rho \geqslant r$, 所以$\frac{R}{2}\geqslant r$. 等号当且仅当$\triangle ABC$为正三角形时成立.

$\triangle DEF$的外接圆称为$\triangle ABC$的九点圆,它还通过另外六个点: L、M、N、L'、M'、N',这里AL、BM、CN是$\triangle ABC$的高, 相交于H, L'、M'、N'分别为AH、BH、CH的中点. 有趣的是九点圆不仅比内切圆大(或相等), 而且覆盖内切圆,可以证明内切圆与九点圆内切(三个傍切圆与九点圆外切).

15. 如果弓形所对圆周角$\alpha \leqslant 45°$, 那么以弦AB为对角线的正方形即为所求,它的边长$a=\frac{AB}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\ r\sin\alpha$.

如果$\alpha>45°$,设正方形$CDEF$为所求的边长最小的正方形,那么通过运动,总可以假定弦AB的端点A在这正方形的一条边CD上,并且$\overparen{AB}$与CF相切. 我们可以进一步断定B在DE上,EF与$\overparen{AB}$相切. 如果B不在DE上时,弓形可以绕A点转动,使$\overparen{AB}$不与CF相切,也不与EF相切,从而正方形$CDEF$不是最小的. 如果EF不与$\overparen{AB}$相切,可将正方形向左平移, 使得A不在CD上, 化为刚刚说过的情况.

从图中不难得出$a=r(1+\sin(\alpha-45°))$.



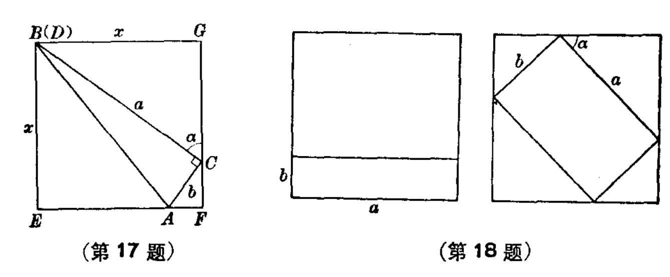
(第15题)　　(第16题)

16. (1) $\alpha \leqslant 60°$,则$a=2r\sin\alpha$.

(2) $\alpha>60°$,则在三角形最小时, 弓形位置如图(2), 三角形的高$\frac{\sqrt{3}}{2}a=2r-r\cos\alpha$,所以$a=\frac{2}{\sqrt{3}}r(2-\cos\alpha)$. 在$\alpha \geqslant 90°$时,结论仍然成立.

17. 可假定直角三角形ABC ($\angle C=90°$) 的顶点B与正方形的顶点D重合. 当正方形$DEFG$为最小时,C在FG上, A在EF上, 否则$\triangle ABC$可绕B点转动,从而可用更小的正方形来覆盖.

从图中不难推知 $x=a\sin\alpha=a\cos\alpha+b\sin\alpha$，所以 $x=\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2+(a-b)^2}}$.



（第 17 题）　　（第 18 题）

18. (1) 如果矩形有一条边在正方形的某一条边上，那么 $x=a$.

(2) 如果矩形的边都不在正方形的边上，那么可以假定矩形有两个顶点分别在正方形的两条邻边上．如果正方形是最小的，那么长方形的另两个顶点也在正方形的边上．由图(2)不难推知 $x=a\cos\alpha+b\sin\alpha=a\sin\alpha+b\cos\alpha$，于是 $\alpha=45°$，$x=(a+b)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

综合(1)、(2)可知在 $b<(\sqrt{2}-1)a$ 时，x 的最小值为 $(a+b)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$；在 $b\geqslant(\sqrt{2}-1)a$ 时，x 的最小值为 a.

19. 如果能覆盖，那么 A、B、C 中有两个点在同一个小三角形中，这与小三角形的边长 <1 矛盾.

20. 参见《几何不等式》习题七第 6 题.

21. 三个小正方形中至少有一个覆盖大正方形的两个顶点，因而它的对角线 $\geqslant1$，边长 $\geqslant\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

22. 设矩形的两条邻边为 a、b，并且 $a\geqslant b$.

(1) 如果 $a=b$，那么这矩形为正方形，由 20 题可知它不能被两个较小的正方形覆盖.

(2) 如果 $b<a<2b$，考虑长为 $x=ka$，宽为 $y=kb$ 的两个矩形，其中 k 小于 1，大于 $\dfrac{a}{2b}$ 与 $\dfrac{b}{a}$．因为 $x\geqslant b$，$2y\geqslant a$，所以这两个与原矩形相似的、较小的矩形能覆盖原矩形(图(1))．

(3) 如果 $a\geqslant2b$．考虑图(2)中两个长为 x、宽为 y 的矩形．不难算得 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{b}{a-2c}$，$c=\dfrac{1}{2}(a-b\operatorname{ctg}\alpha)$，从而

$$x=b\sin\alpha+(a-c)\cos\alpha=b\sin\alpha+\frac{1}{2}a\cos\alpha+\frac{1}{2}b\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}.$$

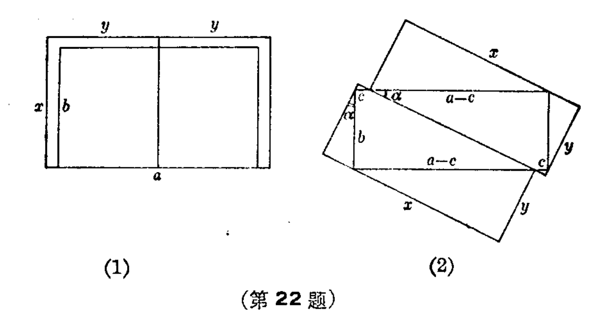
$$y=b\cos\alpha+c\sin\alpha=\frac{1}{2}b\cos\alpha+\frac{1}{2}a\sin\alpha.$$

要使 $\frac{x}{y}=\frac{a}{b}$，即

$$\frac{b\sin\alpha+\frac{1}{2}a\cos\alpha+\frac{1}{2}b\cdot\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}}{\frac{1}{2}b\cos\alpha+\frac{1}{2}a\sin\alpha}=\frac{a}{b},$$

只要取 $\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$ 就可以了，这时

$$y=\frac{b}{2\sqrt{a^2-b^2}}(\sqrt{a^2-2b^2}+a)<b.$$



(1) (2)

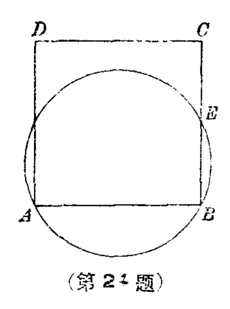
（第 22 题）

23. 设 BC 边的高为 AD，则以 $AC=b$ 与 $AB=c$ 为直径的两个圆分别覆盖 $\triangle ADC$ 与 $\triangle ADB$.

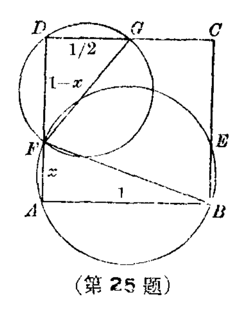
24. $r\geqslant\frac{\sqrt{5}}{4}$. 因为每一个圆覆盖正方形 $ABCD$ 的两个相邻的顶点（否则有一个圆的半径$\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$），设 A、B 被 $\odot(O_1, r)$ 覆盖，C、D 被 $\odot(O_2, r)$ 覆盖，则 BC 中点 E 无论属于哪一个圆，都有 $r\geqslant\frac{\sqrt{5}}{4}$. 不难看出两个半径为 $\frac{\sqrt{5}}{4}$ 的圆能覆盖正方形 $ABCD$.

25. 设这三个圆中有一个圆覆盖边 AB，它的圆周交 BC 于 E，交 AD 于 F；又有一圆覆盖 $\triangle DFG$，其中 G 为 CD 中点. 要求出 r 的最小值，而 $(2r)^2$ 等于 $1+x^2$，$\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-x)^2$ 中较大的一个. 这一最小值在 $1+x^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-x)^2$ 即 $x=\frac{1}{8}$ 时达到，从而 $r=\frac{\sqrt{65}}{16}$.

26. 如果两个正方形覆盖一个圆，那么至少有一个正方形覆盖半个圆，由



（第 24 题）



（第 25 题）

15 题可知 a 的最小值为 $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$.

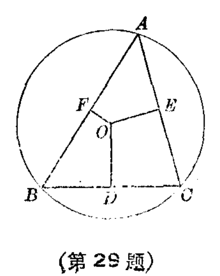
如果三个正方形覆盖一个圆，那么至少有一个正方形覆盖一条弧，这条弧所含的角 $\geqslant 120^\circ$. 由 15 题，a 最小值为 $1+\sin 15^\circ$.

对于 4 个正方形，a 的最小值为 1.

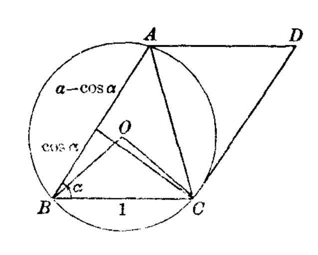
27. 至少有一个三角形覆盖半个圆，由 16 题知 a 的最小值为 $\frac{4}{\sqrt{3}}$.

28. 设法在所述的凸多边形内找到一点 O'，使得 O' 到各边的距离都 $>r$. 为此，在每条边上（向内）作一个矩形，矩形的另一边的长为 r. 这 n 个矩形的面积之和 $=lr$. 因为凸多边形的每个内角 $<180^\circ$，所以每两个相邻的矩形有重叠的部分，这些矩形没有完全覆盖这个凸多边形，换句话说，在凸多边形内可以找到一点在所有的矩形外，这点就是所要找的点.

29. 外心 O 在锐角三角形的内部. 如果 $R\leqslant 1$，设三边中点分别为 D、E、F，则 $\odot(A, 1)$、$\odot(B, 1)$、$\odot(C, 1)$ 分别覆盖四边形 $AEOF$、$BDOF$、$CDOE$. 反过来，如果 $\odot(A, 1)$、$\odot(B, 1)$、$\odot(C, 1)$ 覆盖 $\triangle ABC$，那么圆心 O 必定属于 $\odot(A, 1)$、$(\odot B, 1)$、$\odot(C, 1)$ 中某一个，因此 $OA=OB=OC\leqslant 1$.



（第 29 题）



（第 30题）

30. 由于$\triangle ABC$、$\triangle CDA$是全等的锐角三角形，易知当且仅当$\odot(A, 1)$，$\odot(B, 1)$与$\odot(C, 1)$覆盖$\triangle ABC$时，所述的四个圆覆盖$\square ABCD$.

考虑$\triangle ABC$，如果$\odot(A, 1)$，$\odot(B, 1)$，$\odot(C, 1)$覆盖$\triangle ABC$，那么由上题得$R\leqslant 1$. 因为$BC=1$，所以$\angle BOC\geqslant 60°$，$\angle BAC\geqslant 30°$，$\operatorname{ctg}\angle BAC\leqslant\sqrt{3}$，即$\dfrac{a-\cos\alpha}{\sin\alpha}\leqslant\sqrt{3}$，$a\leqslant\sqrt{3}\sin\alpha+\cos\alpha$. 这一过程可以逆推回去.

31. 如果多边形覆盖O点，则必有一个$\triangle A_iA_jA_k$覆盖O，$\angle A_iOA_j$，$\angle A_jOA_k$，$\angle A_kOA_i$中必有一角$\geqslant 120°$，设$\angle A_iOA_j\geqslant 120°$，则$A_iA_j\geqslant\sqrt{3}r$，与已知矛盾.

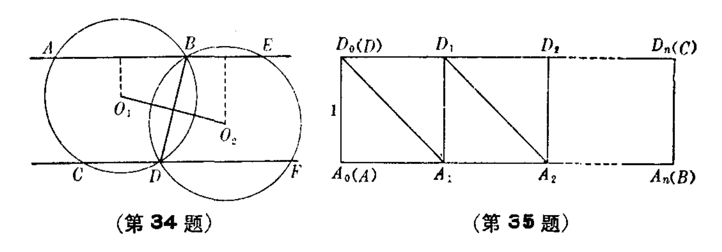
32. 如果P与O是同一点，结论显然. 如果P与O不同，作线段OP的垂直平分线EF，$\triangle ABC$至少有一个顶点，不妨设A点与P点在EF的同一侧，于是$AP<AO$，A在$\odot(P, AO)$内.

33. 设直线AB交$\odot O$的圆周于A'、B'，在线段AB内取点I，使$\dfrac{IA}{IA'}=\dfrac{IB}{IB'}\left(=\dfrac{AB}{A'B'}\right)$. 以$I$为位似中心，$\dfrac{IA}{IA'}$为相似比，作位似变换，则$\odot O$变为一个圆，这圆过$A$、$B$两点，并且完全在$\odot O$内.

34. 设$\odot\left(O_1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$在两条平行线上截得的线段为$AB$、$CD$，$O_1$关于$BD$的对称点为$O_2$，作$\odot\left(O_2, \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，在平行线上截得的线段$BE=CD$，$DF=AB$（如图）. 不难推知$AB+BE\leqslant 2O_1O_2$，而

$$O_1O_2=2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{BD}{2}\right)^2}\leqslant 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=1,$$

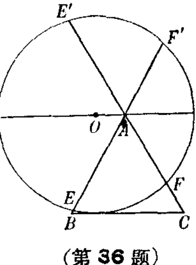
所以$AB+CD\leqslant 2$.



（第 34 题）　　（第 35 题）

35. 先假定a为整数，于是$n=a$. 在AB上取$A_0=A$、A_1、…、$A_n=B$，在CD上取$D_0=D$、D_1、…、$D_n=C$，每相邻两点的距离为1. 以D_0A_1、D_1A_2、…、$D_{n-1}A_n$为直径的n个圆覆盖矩形$ABCD$. 在a不是整数时，上面解法仍然成立，只是$A_{n-1}A_n=D_{n-1}D_n<1$.

由上题，每一个以$\frac{\sqrt{2}}{2}$为直径的圆在 AB 与 CD 上所截线段的和$\leqslant 2$，因此 $n-1$ 个圆不能覆盖 $ABCD$.



(第 36 题)

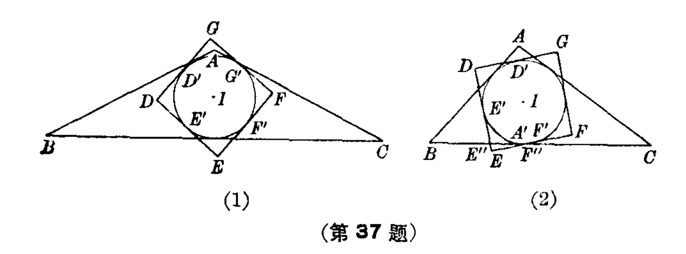
36. 首先注意 $OA \parallel BC$. 设被 $\triangle ABC$ 覆盖的弧为 $\overset{\frown}{EF}$，关于直线 OA 作反射(轴对称)，$\overset{\frown}{EF}$ 成为 $\odot O$ 的弧 $\overset{\frown}{E'F'}$. 因为

$$\angle E'AF = \angle E'AO + \angle OAE + \angle EAF$$
$$= 60° + 60° + 60° = 180°,$$

所以 E'、A、F 共线，同样 F'、A、E 共线. 因此，

$$\overset{\frown}{EF} = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{EF} + \overset{\frown}{E'F'}) = \angle EAF = 60°.$$

37. $\triangle ABC$ 的边与 $\odot I$ 的三个切点把 $\odot I$ 的圆周分成三条弧，正方形 $DEFG$ 的四条边与 $\odot I$ 的四个切点 D'、E'、F'、G' 中必有两个在同一条弧上. 记正方形周长为 s:



(第 37 题)

(1) D'、E' 在一条弧上，F'、G' 在另一条弧上. 这时

$$DD' + E'D + FF' + FG' = 4 \times \frac{s}{8} = \frac{s}{2}.$$

(2) F'、G' 在同一条弧上，D'、E' 分别在另外两条弧上. 这时设 EE'、EF' 分别与 BC 相交于 E''、F''，BC 与 $\odot I$ 相切于 A'，则

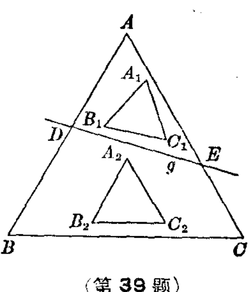
$$2(E'E'' + F'F'') = 2E''F'' > EE'' + EF'',$$
$$E'E'' + F'F'' > \frac{1}{3}(EE' + EF') = \frac{1}{3} \times \frac{s}{4}.$$

被 $\triangle ABC$ 覆盖的总长$> 3 \times \frac{1}{3} \times \frac{s}{4} + \frac{s}{4} = \frac{s}{2}$.

38. 如果半径<2的圆中能无重叠地嵌入两个半径为 1 的圆，将圆的半径缩小 1，则在半径<1的圆中能嵌入两个距离为 2 的点，这是不可能的. 更一般地，在 $r < r_1 + r_2$ 时，半径为 r 的圆中不能无重叠地嵌入一个半径为 r_1 的圆及一个半径为 r_2 的圆，参见 §1 例 4.

如果$\odot(O, 2)$中能无重叠地嵌入三个圆$\odot(O_i, 1)$ $(i=1, 2, 3)$；那么在$\odot(O, 1)$中能嵌入三个点O_i $(i=1, 2, 3)$，每两点间距离$\geqslant 2$，即大于或等于$\odot(O, 1)$的直径。

39．设$\triangle A_1B_1C_1$与$\triangle A_2B_2C_2$能无重叠地嵌入$\triangle ABC$中，则存在一条直线g将这两个三角形分开．设g与边AB、AC分别交于D、E，$\triangle A_1B_1C_1$在$\triangle ADE$中，$\triangle A_2B_2C_2$在四边形$BCDE$中．易知AD、AE均$\geqslant a_1$，所以DB、EC均$<a_2$，DE上每一点到BC的距离$<\frac{\sqrt{3}}{2}a_2$，这与$\triangle A_2B_2C_2$至少有一个顶点到BC的距离$\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}a_2$矛盾．

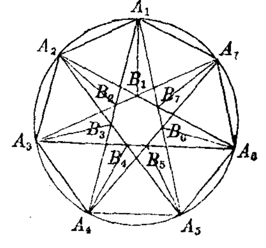


（第39题）

40．将正方形分为四个边长为$\frac{1}{2}$的小正方形．如果有五个点被嵌入正方形内，那么其中必有两个点在同一个小正方形内，因而它们之间的最小距离$\leqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$，等号仅当这五个点为正方形的四个顶点及中心时成立，但这五个点不能构成正五边形．

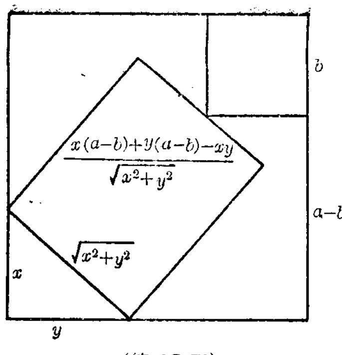
41．八个点中至少有七个点不与圆心重合，将圆分为六个$60°$的扇形，可以假定这七个点均不在构成扇形的六条半径上（否则将这些半径绕圆心适当旋转），根据抽屉原则，至少有一个扇形含两个点，这两个点的距离$<$半径．

42．设$A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$为圆内接正七边形．连结A_1A_4、A_1A_5、A_2A_5、A_2A_6等截得一个正七边形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$（如图），它的直径$B_3B_7<A_1A_2=a_7$．如果八个点中有两个点落在七边形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$中，命题成立．我们假定至少有七个点C_i $(i=1, 2, \cdots, 7)$不在七边形$B_1B_2B_3B_4B_5B_6B_7$中．连结A_1B_1、…、A_7B_7．适当地旋转七边形$A_1A_2\cdots A_7$后，总可以假定四边形$A_1B_1B_2A_2$，…，$A_7B_7B_1A_1$中至少有一个的边界上有已知点，从而推出已知点中至少有两个点属于某个四边形，例如四边形$A_1B_1B_2A_2$．因为四边形$A_1B_1B_2A_2$的直径$=A_1A_2=a_7$，所以命题仍然成立．

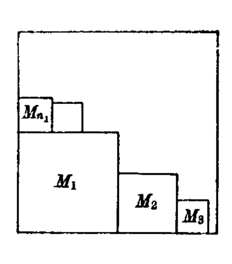


（第42题）

43．这车库的边长u是$\sqrt{x^2+y^2}$与$\frac{x(a-b)+y(a-b)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$中较小者（见图）．如果$\sqrt{x^2+y^2}\geqslant a-b$，则



（第 **43** 题）



（第 **44** 题）

$$a-b-\frac{x(a-b)+y(a-b)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\geqslant\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x+y-\sqrt{x^2+y^2})$$
$$=\frac{x^2+y^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}-(x+y)\geqslant 0,$$

因此 $u\leqslant a-b$，面积的最大值为 $(a-b)^2$.

44．将 M_1、M_2、… 一个接一个地嵌入 N 中，如图所示，从左到右，先排第一排，一直排到不能再排，再往上放第二排，即由

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n_1-1}\leqslant\sqrt{2},\tag{1}$$
$$a_1+a_2+\cdots+a_{n_1}>\sqrt{2},\tag{2}$$

确定出第二排的第一个正方形 M_{n_1}.

第 i 排的第一个正方形 M_{ni} 由

$$a_{n_{i-1}}+a_{n_{i-1}+1}+\cdots+a_{n_i-1}\leqslant\sqrt{2},$$
$$a_{n_{i-1}}+a_{n_{i-1}+1}+\cdots+a_{ni}>\sqrt{2},$$

确定．因此，

$$a_2^2+a_3^2+\cdots+a_{n_1}^2\geqslant a_{n_1}(a_2+a_3+\cdots+a_{n_1})>a_{n_1}(\sqrt{2}-a_1),$$
$$a_{n_1+1}^2+a_{n_1+2}^2+\cdots+a_{n_2}^2>a_{n_2}(\sqrt{2}-a_{n_1})\geqslant a_{n_2}(\sqrt{2}-a_1),$$
$$\cdots$$

相加得 $$1-a_1^2=a_2^2+a_3^2+\cdots>(\sqrt{2}-a_1)(a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots),$$

即 $$a_1+a_{n_1}+a_{n_2}+\cdots<a_1+\frac{1-a_1^2}{\sqrt{2}-a_1}\leqslant\sqrt{2}.$$

因此正方形 M_1、M_2、…能无重叠地嵌入正方形 N 中.

取 M_1 与 M_2 为边长 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的正方形，根据 § 2 例 9 即知 $\sqrt{2}$ 不能改为更小的数.

45. 不能. 因为

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}>\frac{n}{2}\to\infty\,(n\to\infty).$$

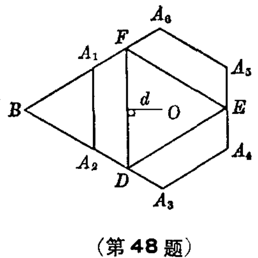
46. 仿照§2例5,利用$(25-1)\times(20-1)=456>120\times\left(1+4\times\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

47. 最大面积为$\frac{3\sqrt{3}}{4}$. 以正三角形$A_1A_3A_5$的面积为最大,因为被六边形的外接圆覆盖的三角形中以这圆的内接正三角形面积为最大,或根据第6题.

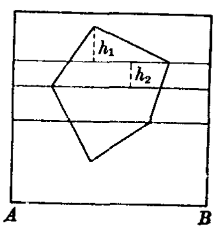
48. 如图,设$\triangle DEF$为面积最大的,$DF\parallel A_1A_2$,则易知E在线段A_4A_5上,D、F分别在A_2A_3、A_6A_1上. 设O为正六边形的中心,O到DF的距离为d. 延长A_6A_1、A_3A_2交于B. 由相似三角形得$\frac{A_1A_2}{DF}=\frac{\sqrt{3}/2}{\sqrt{3}-d}$, 所以$DF=\frac{2(\sqrt{3}-d)}{\sqrt{3}}$, $\triangle DEF=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+d\right)\cdot DF=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+d\right)\cdot\frac{\sqrt{3}-d}{\sqrt{3}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)^2=\frac{27}{16\sqrt{3}}$. 等号当且仅当$d=\frac{\sqrt{3}}{4}$,即$D$为$A_2A_3$的中点时成立,这时三角形面积为$\frac{27}{16\sqrt{3}}$,即正六边形的$\frac{3}{8}$.

49. 若$a\geqslant 2r$,则正方形的内切圆半径$\geqslant r$,并且在$\triangle ABC$内,与§2例1矛盾.

另一方面,$\odot(I, r)$的内接正方形的边长为$\sqrt{2}r$,显然在$\triangle ABC$中,它的边长小于a.



(第48题)



(第51题)

50. 只要证明正方形中至少有一个点被四个圆覆盖,这由$200\times\pi\times\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=100\pi>3\times10^2$就可以推出.

51. 如图,用平行于正方形的边AB的直线将多边形分为三角形与梯形. 如果命题不成立,那么

$$M \leqslant \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2}\ (h_1+h_2+\cdots)=\frac{1}{2}(h_1+h_2+\cdots) \leqslant \frac{1}{2},$$

与已知矛盾.

52. M 是由若干条线段组成的,将这些线段分为两类,第一类与正方形的边 AB 的夹角$\leqslant 45°$,第二类与 AB 的夹角$\geqslant 45°$. 这两类中必有一类的总长$\geqslant 500$,不妨设第一类的总长$\geqslant 500$,它们在 AB 上的射影的总长$\geqslant 500\times\frac{\sqrt{2}}{2}\approx 353.5$. 因为 $AB=1$,所以 AB 上必有一点 E 被折线的射影覆盖了 354 次,过 E 作直线与 AB 垂直,这直线与折线 M 的交点个数$\geqslant 354$.

53. 设直线 $l''\perp l$,将 $4n$ 条线段投影到 l 与 l'' 上. 这两组射影之和$\geqslant 4n$,因此在 l 上或 l'' 上的射影之和 $\geqslant 2n$, 不妨设在 l 上的射影$\geqslant 2n$. 因为圆的直径为 $2n$,所以圆内的线段在 l 上的射影都在一条长为 $2n$ 的线段内,上述的 $4n$ 条线段在 l 上的射影中至少有两条线段的射影有公共点. 过这公共点作与 l'' 平行的直线,这直线即为所求.

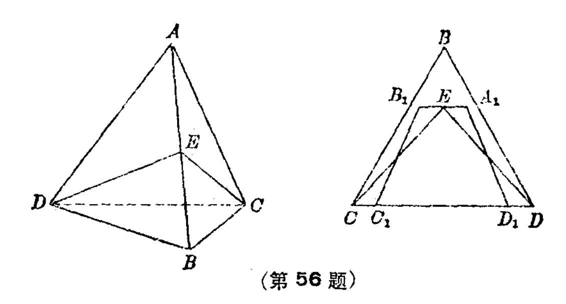
54. 因为$100>8\times(10+2)$,每一条与边 AB 平行的在 AB、CD 之间的直线至少与 8 个圆有公共点. 从 AB 开始,每隔 $2+\varepsilon$ 作一条平行线, 其中 ε 为一个充分小的正数$\left(\text{比如说}\ \varepsilon<\frac{1}{50}\right)$. 因为每两条平行线距离$>2$,所以与每一条直线有公共点的圆互不相同. 这样的平行线共 50 条,所以 $a\geqslant 50\times 8=400$.

55. 以立方体的对角线 AC_1 为射影方向, 立方体的射影为一个边长为 $\frac{\sqrt{2}}{2}a$ 的正六边形 $EFGHIK$. 在正六边形 $EFGHIK$ 中能嵌入一个边长为 a 的正方形, 因此沿对角线 AC_1 方向可以打一个边长为 a 的正方形的洞, 使同样大小的立方体能从洞里通过(洞还可以稍微打大一些, 使得立方体能顺利地通过).

(第 55 题)

56. 考虑正四面体 $ABCD$ 的射影. 若射影方向为 AB, 则因为 $CD\perp AB$, 所以四面体的射影为 $\triangle ECD$, 其中 E 为 AB 中点. 将四面体绕 AB、CD 的公垂线稍稍转动,再射影到原来的射影面上,这时的射影成为四边形 $A_1B_1C_1D_1$. 由于 $\triangle CDE$ 可以放入正三角形 BCD 中, 所以在转动很小时,现在的射影即四边形 $A_1B_1C_1D_1$ 也能放入 $\triangle BCD$ 中,并且可以适当移动, 使得它与 $\triangle BCD$ 的边无公共点, 即完全在 $\triangle BCD$ 内部. 在 $\triangle BCD$ 中打一个这样的洞 $A_1B_1C_1D_1$, 则同样大小的正四面体可以从洞里通过.

57. 利用复数,这甲虫与 A_0 的距离为



（第 56 题）

$$
\begin{aligned}
&|1+e^{i\theta_1}+e^{i(\theta_1+\theta_2)}+\cdots+e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_n)}| \\
&=\frac{1}{2}|1+(1+e^{i\theta_1})+e^{i\theta_1}(1+e^{i\theta_2})+\cdots+e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})}(1+e^{i\theta_n})+e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_n)}| \\
&=\frac{1}{2}\left|1+\left(\frac{1+e^{i\theta_1}}{1-e^{i\theta_1}}-\frac{1+e^{i\theta_1}}{1-e^{i\theta_1}}\cdot e^{i\theta_1}\right)+e^{i\theta_1}\left(\frac{1+e^{i\theta_2}}{1-e^{i\theta_2}}-\frac{1+e^{i\theta_2}}{1-e^{i\theta_1}}\cdot e^{i\theta_2}\right)\right. \\
&\quad\left.+\cdots+e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_{n-1})}\left(\frac{1+e^{i\theta_n}}{1-e^{i\theta_n}}-\frac{1+e^{i\theta_n}}{1-e^{i\theta_n}}\cdot e^{i\theta_n}\right)+e^{i(\theta_1+\cdots+\theta_n)}\right| \\
&\leqslant\frac{1}{2}\left(\left|1+\frac{1+e^{i\theta_1}}{1-e^{i\theta_1}}\right|+\left|-\frac{1+e^{i\theta_1}}{1-e^{i\theta_1}}+\frac{1+e^{i\theta_2}}{1-e^{i\theta_2}}\right|+\cdots+\left|-\frac{1+e^{i\theta_{n-1}}}{1-e^{i\theta_{n-1}}}\right.\right. \\
&\quad\left.\left.+\frac{1+e^{i\theta_n}}{1-e^{i\theta_n}}\right|+\left|-\frac{1+e^{i\theta_n}}{1-e^{i\theta_n}}+1\right|\right) \\
&=\frac{1}{2}\left(\left(\sin\frac{\theta_1}{2}\right)^{-1}+\left(-\operatorname{ctg}\frac{\theta_2}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\theta_1}{2}\right)+\cdots+\left(-\operatorname{ctg}\frac{\theta_n}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\theta_{n-1}}{2}\right)\right. \\
&\quad\left.+\left(\sin\frac{\theta_n}{2}\right)^{-1}\right)\leqslant\frac{1}{2}\left(2+\operatorname{ctg}\frac{\theta_1}{2}-\operatorname{ctg}\frac{\theta_n}{2}+2\right)\leqslant 2+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \\
&=2+\frac{\sqrt{3}}{3}\approx 2.6<3.
\end{aligned}
$$

58．先证明每条抛物线及其内部能被一个任意小的角覆盖，然后利用§3例1．实际上，我们证明了有限多个抛物线及其内部不能覆盖一个角，不论这个角多么小．

59．设带形所在平面为平面 P．过每个带形的两条边各作一个平面与平面 P 垂直．这两个平面平行，夹成一个空间带形．它在直径为 d 的球面上截得一球带，面积 $\leqslant \pi d b_i (1\leqslant i\leqslant n)$．因而 n 个“空间带形”在球面上截得面积之和不大于

$$\pi d b_1+\pi d b_2+\cdots+\pi d b_n=\pi d(b_1+b_2+\cdots+b_n)<\pi d^2=\text{球面面积},$$

n 个空间带形不能覆盖直径为 d 的球，由此即得结论．

60．每个直径为1的点集能被一个边长为 $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ 的正六边形覆盖，这正六边形可分为三个平行四边形，每一个平行四边形的较长的对角线为1，因而可被

一个直径为 1 的圆覆盖. 或者用一个边长为$\sqrt{3}$的正三角形 ABC 覆盖这个直径为 1 的点集，设 O 为 $\triangle ABC$ 的外心，则 $OA=OB=OC=1$. 以 OA、OB、OC 为直径的圆覆盖 $\triangle ABC$.

每个直径为 1 的点集，能被一个边长为 1 的正方形覆盖，这个正方形可以分为四个边长为 $\frac{1}{2}$ 的正方形，每一个都能用直径为 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 的圆覆盖.

61. 每一个直径为 1 的点集能用一个边长为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的正六边形 $ABCDEF$ 覆盖，设正六边形中心为 O，BC、DE、FA 中点分别为 G、H、I，则正六边形被分为三个五边形：$OIABG$、$OGCDH$、$OHEFI$，每一个的直径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 不能改为更小的数，例如边长为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 的正六边形或者直径为 1 的圆都不能分为三个直径$<\frac{\sqrt{3}}{2}$的点集(参见 §1 例 11).

62. 考虑正方形的对角线 AC 与 BD，其中必有一条与带形的边所成的角 $\alpha\geqslant 45°$，因而 $b\geqslant\sqrt{2}\cos 45°=1$.

63. 设这些圆半径为 1，它们的圆心形成一个直径$\leqslant 2$的点集，由 §3 例 6 这个点集能用一个边长为 $\frac{2}{\sqrt{3}}$ 的正六边形覆盖，再利用 67 题.

64. 设这六个圆为 $\odot(O_k, r_k)(k=1, 2, \cdots, 6)$. 如果这六个圆可以用一颗图钉钉住，那么它们有一个公共点 O. 不妨假定在射线 OO_1 依逆时针转动时顺次地经过 OO_2、OO_3、$\cdots$、OO_6. 根据已知，在 $\triangle O_1OO_2$ 中，$O_1O_2>r_1\geqslant OO_1$，$O_1O_2>r_2\geqslant OO_2$，因此 $\angle O_1OO_2>60°$. 同理 $\angle O_2OO_3$，$\angle O_3OO_4$，$\angle O_4OO_5$，$\angle O_5OO_6$，$\angle O_6OO_1$ 均大于 $60°$，从而

$$\angle O_1OO_2+\angle O_2OO_3+\angle O_3OO_4+\angle O_4OO_5+\angle O_5OO_6+\angle O_6OO_1>360°,$$

矛盾.

65. $\odot K_j$ 与 $\odot(K_0, r)$ 有公共点，因而 K_j 在 $\odot(K_0, 2r)$ 内. 由 §1 例 12，存在六个圆 $\odot(A_i, r)$ $(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 及 $\odot(K_0, r)$ 覆盖 $\odot(K_0, 2r)$. 因而 K_j 必在 $\odot(K_0, r)$ 或某个 $\odot(A_i, r)$ 内，换句话说，K_0 或某个 A_i 在 $\odot K_j$ 中. 如果在 K_0 及 $A_i(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)$ 各钉一颗图钉，那么圆 K_0、K_1、$\cdots$、K_n 就全被钉住了.

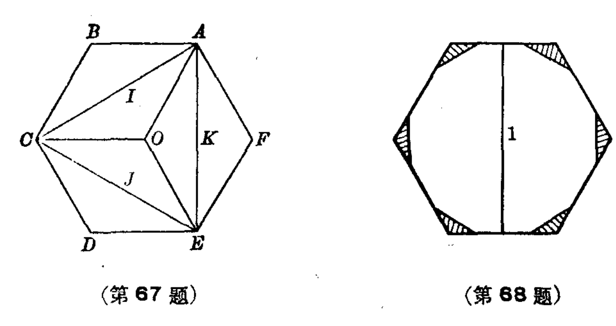
66. 将 $\odot(K_0, 2r)$ 的圆周 48 等分，以分点 K_1、K_2、$\cdots$、K_{48} 及 K_0 为圆心作 49 个半径为 r 的圆.

由于每一个半径为 r 的圆至多能覆盖 $\odot(O, 2r)$ 的圆周的1/6，即至多覆盖 K_1, K_2, $\cdots$, K_{48} 中 9 个点. 五个半径为 r 的圆至多覆盖其中 45 个点，因而五颗图钉至多能钉住 $\odot K_1$, $\odot K_2$, $\cdots$, $\odot K_{48}$ 中 45 个圆.

六颗图钉，其中一颗钉住 $\odot(K_0, r)$，它至多还钉住 $\odot K_i$ $(i=1, 2, \cdots, 48)$

中一个圆．其余五颗图钉，至多钉住 $\odot K_i(i=1, 2, \cdots, 48)$ 中 45 个圆．因而至少还有两个圆未被钉住．

67．将图钉钉在 AC、CE、EA 的中点 I、J、K．设正六边形中心为 O，则圆心在四边形 $ABCO$ 中的单位圆过 I 点，即被图钉 I 钉住．

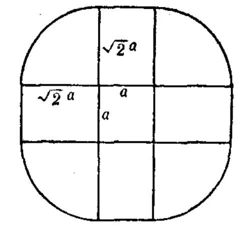


（第 67 题）　　（第 68 题）

68．如图两个相对的"角"内的点之间的距离 ≥ 1，因此其中只有一个角中可能有点集 M 的点，六个角中至少有三个角不含 M 的点，其中必有两个角是不相邻的．

69．$M(r)$ 由多边形 M 添加上一些矩形及一些扇形而得．这些矩形的宽为 r，而长的和等于多边形 M 的周长，这些扇形的面积的和恰好等于半径为 r 的圆．

70．仿照 §3 例 9，并注意对于边长为 a 的正方形 M，$M(\sqrt{2}a)=(1+2\pi+4\sqrt{2})a^2$，而 $M(\sqrt{2}a)$ 也就是与正方形 M 有公共点并且不大于 M 的全体正方形所覆盖的面积．



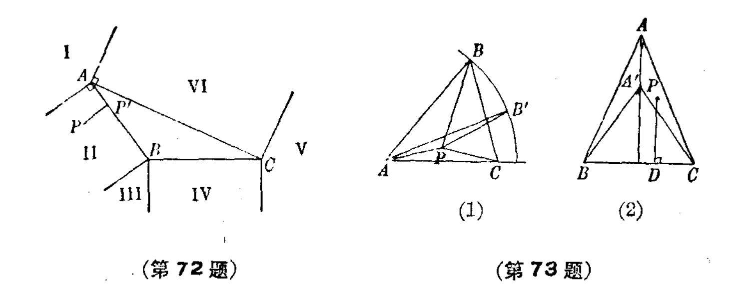
（第 70 题）

71．首先去掉那些"多余的"区间，也就是被其他区间完全覆盖的那种区间．剩下的区间可以按照它们的左端点的大小顺序记为 I_1、I_2、$\cdots$、I_n．将它们分为两组，第一组区间为 $I_1, I_3, I_5, \cdots$．第二组为 $I_2, I_4, I_6, \cdots$．其中必有一组覆盖的长度不小于 $\frac{1}{2}$，这一组区间即为所求．

72．(1) 如果 P 在 $\triangle ABC$ 中，结论显然．如果 P 在图中区域 I 内，A 为三个圆的公共点．如果 P 在区域 II 内，P 在 AB 上的射影 P' 为三个圆的公共点．

(2) 设 r_1, r_2, r_3 中最大的为 r，则 $\odot(P, r)$ 覆盖 $\triangle ABC$．

73．如果 $\odot(A, r_1)$、$\odot(B, r_2)$、$\odot(C, r_3)$ 有公共点，我们称 $\triangle ABC$ 具有性质 N（由上题，我们总可以假定有公共点 P 属于 $\triangle ABC$）．



（第 72 题）　　（第 73 题）

现在设法调整 $\triangle ABC$，使它的三边长成为 a'、b'、c'，但仍保持性质 N.

(1) 首先证明，对 $\triangle ABC$ 的任一边，例如 a，可以使它调整为区间 $(|b-c|, a]$ 内的任一值(其他两边不变)，而仍保持性质 N.

如图(1)，不妨假定 $\angle BAP \geqslant \angle PAC$，让 B 在 $\odot(A, AB)$ 的圆周上变动，并保持在 $\angle BAC$ 内，则在任一位置 B'，由 $\triangle BAP$ 与 $\triangle B'AP$ 得 $B'P \leqslant BP$，即 P 在 $\odot(B', r_2)$ 内，$\triangle A'BC$ 仍具有性质 N.

可设 $a \geqslant b \geqslant c$.

(2) 如果 $b' \leqslant a' \leqslant b$.

这时先用(1)调整三边为 b, b, c. 因为 $c' > b-b=0$，所以可再用 (1) 调整为 b, b, c'. 然后如图(2)，在这等腰三角形的高上取一点 A'，使 $\triangle A'BC$ 的边为 a', a', c'，设公共点 P 在 BC 上的射影为 D (参见图(2))，易知线段 PD 上必有一点 P'(P' 可以与 P 重合)，满足 $A'P' < AP$，而线段 PD 上任一点在 $\odot(B, r_2)$ 与 $\odot(C, r_3)$ 中，因此 $\triangle A'BC$ 仍具有性质 N. 最后再用(1) 调整边长为 a', b', c'.

(3) 如果 $a' \geqslant b$.

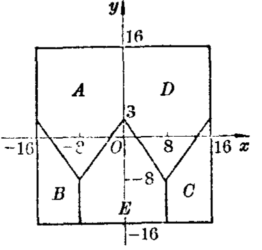
先用(1)调整三边为 a', b, c. 因为 $b' > a'-c' > a'-c$，可再调整为 a', b', c. 最后调整为 a', b', c'.

(4) 如果 $a' < b'$.

仿照(2)，先用(1)调整三边为 b, b, c. 再用(1)调整为 b, b, c'. 然后用(2)中方法，调整为 b', b', c'. 最后再用(1)调整为 a', b', c'.

在 $\triangle A'B'C'$ 具有性质 N 时，设 P 为 $\odot(A', r_1)$，$\odot(B', r_2)$，$\odot(C', r_3)$ 的公共点并且 P 在 $\triangle A'B'C'$ 中，又设 P 在三边的射影分别为 Q, R, S，则 $\odot(A', r_1)$，$\odot(B', r_2)$，$\odot(C', r_3)$ 分别覆盖四边形 $B'QPS$, $C'RPQ$, $A'SPR$，因此这三个圆覆盖 $\triangle A'B'C'$.

74. 为方便起见，假定正方形的边长为 32，我们证明 d 的最小值为 $\sqrt{425}=5\sqrt{17}$ (对于边长为 1 的正方形，d 的最小值为 $\frac{5\sqrt{17}}{32}$)，为此建立坐标如右图。



(第 74 题)

不难验证图中五个部分的直径都是 $5\sqrt{17}$. d 不能改为比 $5\sqrt{17}$ 小的数. 因为正方形的四个顶点应当由四个集 A、B、C、D 覆盖，而由 $u^2+v^2\leqslant 425$，得 $u+v<32$，所以每个集覆盖的正方形的边长小于周长的 $\frac{1}{4}$，第五个集 E 一定要覆盖正方形的边的一部分. 由于点 $(0, 3)$ 到四个顶点的距离均不小于 $5\sqrt{17}$，如果 $d<5\sqrt{17}$，则 $(0, 3)$ 只能属于点集 E，从而点 $(8, -16)$ 不属于 E，属于 C，点 $(16, 3)$ 不属于 C，属于 D. 同理点 $(-16, 3)$ 属于 A，于是 $(0, 16)$ 不属于五个集中的任一个.

75. 设树叶总数为 $15n$，覆盖面积(即阴影面积)为 S. 如果命题不成立，那么 $7n$ 片树叶覆盖的面积 $<\frac{7}{15}S$. 从而 C_{15n}^{7n} 种可能的取法得到的覆盖面积的总和 $S'<\frac{7}{15}S\cdot C_{15n}^{7n}=C_{15n-1}^{7n-1}S$. 但每片树叶在这 C_{15n}^{7n} 种取法中出现 C_{15n-1}^{7n-1} 次，从而 $S'=C_{15n-1}^{7n-1}S$，矛盾.

76. 作关于圆心的中心对称，每一个点变为它的对径点. 如果任一对对径点中至少有一个点在已给弧中，那么已给的弧及它们经过中心对称后所得到的那些弧覆盖整个圆周，但这些弧的长的和 $<2\times\frac{1}{2}$ 圆周，矛盾.

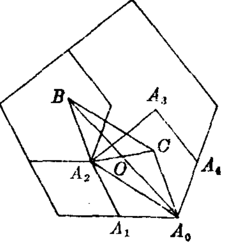
77. 设已知点为 A_0, A_1, $\cdots$, A_{1982} (依顺时针顺序排列)，$\alpha_i=\angle A_0OA_i$ ($i=1, 2, \cdots, 1982$). 将第二个圆周叠合在第一个圆周上，然后让第二个圆周绕圆心依逆时针方向作 1982 次旋转，旋转角分别为 α_1, α_2, $\cdots$, α_{1982}. 由于已给弧的长度的和 <1，这些弧及它们经过各次旋转所得到弧的长度的和 <1983，即小于圆周，所以在第一个圆周上必有一点 B 未被覆盖. 不妨设这点就是 A_0 (否则将第一个圆周绕圆心转动，旋转角为 $\angle A_0OB$)，则 A_0, A_1, $\cdots$, A_{1982} 均不被第二个圆周上已给的弧覆盖.

78. 以 A_0 为位似中心，相似比为 2:1，作位似变换，将 M_0 变为 M'，则面积 $M'=4M_0$. 我们证明 $M_i\subset M'$ ($i=1, 2, 3, 4$).

因为任一点 $B\in M_i$ 是由一点 $C\in M_0$ 经过将 A_0 变为 A_i 的平移而得到的，所以四边形 A_0CBA_i 是一个平行四边形. 因为 C、A_i 都属于 M_0，所以 CA_i 的中点 O 属于 M_0，但 O 也是 A_0B 的中点，所以经过上面的位似变换，O 变为 B，这

就是说 $B\in M'$，从而 $M_i\subset M$.

M_0、M_1、M_2、M_3、M_4 的面积的和等于 5，而它们全在面积为 4 的多边形 M' 内，所以 M_0，M_1，M_2，M_3，M_4 必有重叠部分.



（第 78 题）

79. 如果每两个小矩形的公共部分的面积 $<\frac{1}{9}$，则 9 个小矩形的面积的和 $<5+C_9^2\times\frac{1}{9}=5+4=9$，矛盾！

80. 每一个已知圆均在两个以原点 O 为圆心的圆周之间，过 O 点任作一直线，每两个圆周与这直线相截得到一个区间，这个区间的长度等于已知圆的直径. 这些区间的和为有限，因此在直线上存在一点 A 不属于任一个区间. $\odot(O, OA)$ 的圆周与已知的圆无公共点.

81. 对 $(0, 1)$ 中的任一有理数 $\frac{p}{q}$，

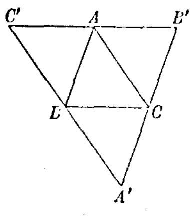
$$\left|\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{p}{q}\right|=\frac{1}{\sqrt{2}q}|q-\sqrt{2}p|\geqslant\frac{|q^2-2p^2|}{\sqrt{2}q(q+\sqrt{2}p)}$$

$$\geqslant\frac{1}{\sqrt{2}q(q+\sqrt{2}p)}>\frac{1}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})q^2}>\frac{1}{4q^2}.$$

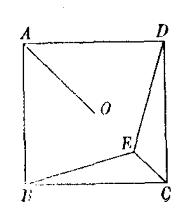
82. 设以点集 M 中的点为顶点的三角形中，$\triangle ABC$ 的面积为最大. 过 A、B、C 分别作直线与对边平行，截得 $\triangle A'B'C'$，则 $\triangle A'B'C'$ 的面积 $\leqslant 4$，并且点集 M 被 $\triangle A'B'C'$ 覆盖.

83. 设 O 为正方形的中心，E 为 AC 上一点，$\angle BEC=120°$，则 OA、EB、ED、EC 组成一个不透光的集，它的总长为

$$\frac{\sqrt{2}}{2}+2\times\frac{\sin 45°}{\sin 120°}+\frac{\sin 15°}{\sin 120°}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin 15°\approx 2.639.$$

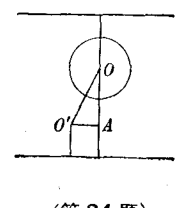


（第 82 题）



（第 83 题）

84. 设$\odot O$为带形中一圆，过O作直线与带形的边垂直．这条直线上必有一点属于另一个圆$\odot O'$，因此O'到这直线的距离$O'A\leqslant 1$．因为$OO'\geqslant 2$，所以$OA\geqslant\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$，$b\geqslant 1+OA+1\geqslant 2+\sqrt{3}$．



(第 **84** 题)

85. 能．因为正方形可以分为n个宽为$\frac{1}{n}$，长为1的矩形．每个矩形里可以作n个直径为$\frac{1}{2n}$的彼此没有公共点的圆．所有的圆的半径的和等于$n^2\times\frac{1}{4n}=\frac{n}{4}$，随$n$增大而趋于无穷．

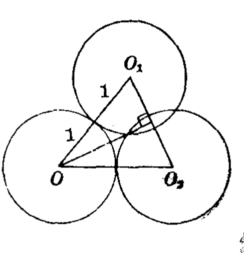
86. 以每个点为圆心作一个半径为$\frac{1}{2}$的圆．这100个圆的直径的和为100．如果这些圆中某两个圆有公共点，那么作一个圆覆盖这两个圆，并且直径不大于两个圆直径的和(§1例4)．用这圆代替原来的两个圆，直径的和不会增加．这样继续处理下去，直到所有的圆都没有公共点．显然这时每个已知点的覆盖圆的半径$\geqslant\frac{1}{2}$．

用ε表示每两个圆之间的距离的最小值．将每个圆的半径减少$\frac{1}{2}-\frac{\varepsilon}{3}$，那么所得到的圆仍然覆盖100个已知点，每两个圆之间的距离>1，并且直径的和<100．

87. 6个．

88. 设O_1、O_2为附着的圆的圆心，则$O_1O_2>1$，由图易知

$$\angle O_1OO_2\geqslant 2\arcsin\frac{\frac{1}{2}}{2}\approx 29^\circ,\ 360^\circ\div 29^\circ\approx 12.$$



(第 88 题)

所以最多可以附着12个圆，每一个圆不覆盖其他圆的圆心．

89. 9个．参见《几何不等式》习题七22．

90. 如果 O_1O_2、O_2O_3、O_3O_1 都 $<\sqrt{3}$，则由 §3 例 5，能用一个半径为 1 的圆覆盖 O_1、O_2、O_3，从而这圆的圆心是 $\odot(O_1, 1)$，$\odot(O_2, 1)$，$\odot(O_3, 1)$ 的公共点，在这点钉一个图钉就可以把三个圆同时钉住.

如果 O_1O_2，O_2O_3，O_3O_1 中最长的一条 $O_2O_3\geqslant\sqrt{3}$. 设 O 为 O_2O_3 的中点，则 $OO_2=OO_3=\frac{1}{2}O_2O_3<1$（否则 $O_1O_2^2+O_1O_3^2+O_2O_3^2\geqslant\frac{1}{2}(O_1O_2+O_1O_3)^2+O_2O_3^2>\frac{3}{2}O_2O_3^2\geqslant6$），$OO_1<1$（否则 $O_1O_2^2+O_1O_3^2=\frac{1}{2}O_2O_3^2+2OO_1^2\geqslant\frac{3}{2}+2>3$，$O_1O_2^2+O_1O_3^2+O_2O_3^2>6$），因此 O 是 $\odot(O_1,1)$，$\odot(O_2, 1)$，$\odot(O_3, 1)$ 的公共点，即在 O 点钉一个图钉就可以把三个圆同时钉住.

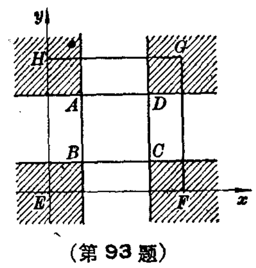
可以证明如果 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant4}O_iO_j^2<16$，则可以用一颗图钉把四个圆 $\odot(O_i, 1)$ $(i=1, 2, 3, 4)$ 同时钉住.

91. 在 $n=2$ 时，设 $\odot(O_1, r_1)$ 与 $\odot(O_2, r_2)$ 无公共点，取 d 满足 $O_1O_2-r_1-r_2>d>0$，则以 d 为直径的圆决不可能与 $\odot(O_1, r_1)$ 及 $\odot(O_2, r_2)$ 都有公共点.

设命题对 $n-1$ 成立，对于 n 个圆 $\odot(O_i, r_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，如果 $n-1$ 个圆 $\odot(O_i, r_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 的交是空集，那么由归纳假设，命题成立. 如果 $n-1$ 个圆 $\odot(O_i, r_i)$ $(i=1, 2, \cdots, n-1)$ 的交集 M 不是空集，那么由于 M 与 $\odot(O_n, r_n)$ 没有公共点，这两个集合的距离 $\delta>0$，取正数 $d<\delta$，则以 d 为直径的圆决不可能与这 n 个圆都有公共点. 本题的 d 实际上是 §3 末所说勒贝格数.

92. 取这 n 个圆的各种组合（共 2^n-1 种），如果一个组合中的各个圆有公共点，即它们的交集不是空集，我们就把这个组合去掉. 对于剩下的每一个组合，由上题可以找到一个圆，无论怎样移动都不可能与这个组合中的每一个圆有公共点. 取这些圆中最小的一个，那末这个圆就是所求的"检验圆".

93. 这个凸形有一个内接正方形 $ABCD$，周长小于 4，将它放到坐标平面的单位正方形 $EFGH$ 中，使它们的对应边互相平行（如图）. 由于过 A 的支持直线必定不在 $\angle BAD$ 及其对顶角的内部，从而可推出所述凸形与阴影部分无公共点，因而不覆盖任何一个格点.

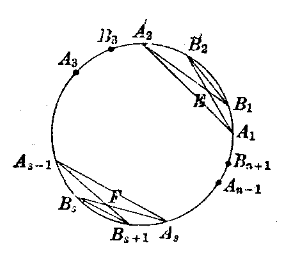


（第 93 题）

94. 设 AB 为凸形 M 的直径，在 A 点作直线 $l\perp AB$，则 l 一定是支持直线，否则有一点 $A'\in M$ 与 B 在直线 l 的两侧，从而 $\angle A'AB>90°$，$A'B>AB$，矛盾.

同样过 B 作 $l'\perp AB$，l' 也是支持直线. 再作两条与 AB 平行的支持直线，这

四条直线构成一个覆盖 M 的矩形，它的面积 $\leqslant 2M$。



（第 **95** 题）

95. 设多边形 P_{n-1} 的顶点为 A_1、A_2、…、A_{n-1}，P_{n+1} 的顶点为 B_1、B_2、…、B_{n+1}. 我们用 $<$ 表示这些顶点在圆周上的排列顺序，因为 B_i 的个数比 A_j 多两个，经适当的重新编号，有

$A_1 \leqslant B_1 < B_2 < A_2 \leqslant A_{s-1} \leqslant B_s < B_{s+1} < A_s$.

取多边形 $A_1B_2 \cdots B_s A_s \cdots A_{n-1}$ 及 $B_1A_2 \cdots A_{s-1} B_{s+1} \cdots B_{n+1}$，则如图，它们的面积之和 $= P_{n-1} + P_{n+1} + \triangle A_1 EA_2 - \triangle B_1 EB_2 + \triangle A_{s-1}FA_s - \triangle B_s FB_{s+1} \geqslant P_{n-1} + P_{n+1}$，从而 $2P_n \geqslant P_{n-1} + P_{n+1}$. 这个命题称为 Dowker 定理，对于凸形仍然成立，证法与上面类似.

96. 考虑 §5 例 4 的图中，椭圆曲线 $x^2+y^2-2xy\cos 52°6'=1$ 与等高线 $xy=$常数的公共点，即知 $r_i r_{i+1}$ 的最小值在 C 点取得，即在 $r_i=\frac{2}{\sqrt{3}}$，$r_{i+1}=1.121$ 时取得，这时所说的七边形的面积

$$\geqslant 7\times\frac{1}{2}\times\frac{2\sin 51°19'}{\sqrt{3}}\times 1.121$$

$$\geqslant 3.53 \geqslant 2\sqrt{3}\approx 3.47.$$

97. 问题即嵌入 n 个半径为 r 的圆.

98. 问题即用 n 个半径为 r 的圆来覆盖这片沙漠.

99. 对每一个圆作一个半径为 $2r$ 的同心圆，则得一族覆盖全平面的圆，所以满系的密度 $\geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{27}} \div 4 = \frac{\pi}{\sqrt{108}}$.

100. 如果 P_i 不被 $\odot(K_i, 2r)$ 覆盖，则有一点 $A\in P_i$ 并且 $K_iA>2r$，从而 $K_jA \geqslant K_iA > 2r (j=1, 2, \cdots)$，即 K_1, K_2, … 都在 $\odot(A, 2r)$ 外，因而可以再作一个圆，即 $\odot(A, r)$ 与 $\odot(K_1, r)$, $\odot(K_2, r)$, …, 均无重叠.

101. 如果 $b>1$, $a>1$，则由 §5 定理 1.2,

$$a<\frac{M}{\sqrt{12}}, \quad b>\frac{2}{\sqrt{27}}M,$$

所以

$$3b>4a.$$

102. 因为每两个区间有公共点，所以 $a_i \leqslant b_j$ $(i, j=1, 2, \cdots n)$. 设 a_1, a_2, …, a_n 中最大的为 a，则 a 属于这 n 个区间.

103. 设圆周 K_1、K_2、K_4、K_5 的公共点为 A, K_1、K_3、K_4、K_5 的公共点为 B, K_2、K_3、K_4、K_5 的公共点为 C, 那么 A、B、C 均为圆周 K_4 与 K_5 的公共点,但两个圆周至多有两个公共点,所以 A、B、C 中必有两个相同,不妨设 A 与 B 相同,它就是五个圆周的公共点. 显然 5 可改为 $n(n\geqslant5)$.

104. 将每个圆的半径都增加 1,对这些圆应用海莱定理,得出它们有一个公共点 A, $\odot(A, 1)$ 就是与已知的 100 个圆都有公共点的圆.

又解　对每三个圆有一个半径为 1 的圆与它们有公共点,利用 §6 例 5 即得.

105. 任三点 A_i, A_j, A_k 被半径为 r 的圆覆盖, 因此由第 5 题, A'_i, A'_j, A'_k 被半径 $<r$ 的圆覆盖. 由荣格定理, A'_1, A'_2, $\cdots$, A'_n 被半径 $<r$ 的圆覆盖.

106. $\odot(O_1, r_1)$, $\cdots$, $\odot(O_n, r_n)$ 中每三个圆有公共点, 由第 73 题, $\odot(O'_1, r_1)$, $\cdots$, $\odot(O'_n, r_n)$ 中每三个圆有公共点,因此这 n 个圆有公共点.

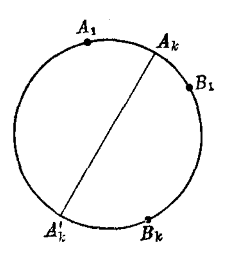
107. 如果带形的边互相平行,作一条直线与带形的边垂直,每个带形与这条直线相截得到一个区间,这组区间中每三个有公共点,因而所有的区间有公共点.

如果带形 $M_i(i=1, 2, \cdots)$ 的边不全平行,先取两个边不平行的带形,截得一个平行四边形. 根据海莱定理, 每五个带形有公共点. 记 M_i 与上述平行四边形的交为 N_i,则每三个 N_i 有公共点. 因为 N_i 是凸形,所以根据海莱定理,全体 N_i (从而全体 M_i)有公共点.

注意由于 M_i 不是凸形,不能直接应用海莱定理.

108. 仿照 §6 例 5.

109. 先将优弧全部去掉并不影响结论. 如果 $\overset{\frown}{A_iB_i}\supset\overset{\frown}{A_jB_j}$, 那么将 $\overset{\frown}{A_iB_i}$ 去掉也不影响结论. 因此可以假定每条弧都是劣弧并且每一条弧都不包含在其他弧中. 取定一弧 $\overset{\frown}{A_1B_1}$, 其他的弧可以分为两类,第一类含 A_1, 第二类含 B_1. 如果这两类中有一类是空集,比如说仅有第二类的弧, 那么过 B_1 点的直径即为所求. 如果两类都不是空集,那么在第二类弧的端点 A_i 中有一点 A_k, 其余的端点 A_i 均在 $\overset{\frown}{A_1A_k}$ 内. 我们断言过 A_k 的直径 $A_kA'_k$ 即为所求. 因为第一类弧中任一弧若不含 A_k, 则必含 A'_k, 否则不可能与 $\overset{\frown}{A_kB_k}$ 有公共点. 第二类弧显然含有 A_k, $\overset{\frown}{A_1B_1}$ 也含有 A_k, 所以直径 $A_kA'_k$ 与每一条弧都有公共点.



(第 109 题)

110. 以 O 为圆心作一个圆. 平面上任一点 A 可以投影到 $\odot O$ 的圆周上, 即作射线 OA 与圆周相交于 A'. 将每个已知圆都投影到 $\odot O$ 的圆周上, 得到 n 个两两有公共点的弧, 再应用上题这些弧有公共点 B, 直线 OB 即为所求.

111．取定一条弧 $\widehat{A_1B_1}$，考虑其余的弧 M_i 与 $\widehat{A_1B_1}$ 的公共部分 M'_i．M'_i 仍然是弧，并且每两个 M'_i 有公共点．取圆周上不在 $\widehat{A_1B_1}$ 内的一点，在这点将圆周剪开，拉成直线，就化为 102 题．

或者仿照 § 6 例 4，考虑每一条弧的凸包，即相应的弓形，再应用海莱定理．

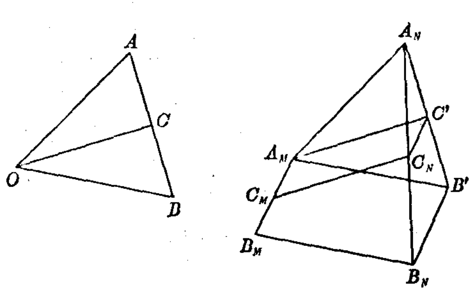
112．与 109 题相同可以假定这些弧互不包含．先取一条弧 $\widehat{A_1B_1}$，考虑其余各弧 M_i 与 $\widehat{A_1B_1}$ 的公共部分 M'_i，每两个 M'_i 一定有公共点(否则，设 M'_2 与 M'_3 无公共点，那么 M_2 与 M_3 的公共点在 $\widehat{A_1B_1}$ 外，M_1、M_2 与 $\widehat{A_1B_1}$ 的总长 $\geqslant$ 圆周，与已知每条弧小于圆周的 1/3 矛盾)．以下同上题解法．

113．作一条直线 $l' \perp l$．将每个凸形(垂直)射影到 l' 上，由 102 题，这些射影(线段)有一个公共点，过这点作与 l 平行的直线，则这直线与每个凸形都有公共点．

114．设 $A \in N'$，$B \in N'$．C 为线段 AB 上任一点，要证明 $C \in N'$，即点集 M 经过平移 $\overrightarrow{OC}$ 后与点集 N 有公共点．

因为 $A \in N'$，即点集 M 经过平移 $\overrightarrow{OA}$ 后与点集 N 有公共点 A_N，所以 M 中有一点 A_M 经过平移 $\overrightarrow{OA}$ 后变为 N 中一点 A_N．同理，M 中有一点 B_M 经过平移 $\overrightarrow{OB}$ 后变为 N 中一点 B_N．

于是经过平移 $\overrightarrow{OA_M}$，则 A 变为 A_N．设这时 B 变为 B'，则 C 变为线段 A_NB' 上一点 C'．



(第 114 题)

在 $\triangle A_NB'B_N$ 中，作 $C'C_N \parallel B'B_N$ 交 A_NB_N 于 C_N，则 $C'C_N \leqslant B'B_N$．

因为经过平移 $\overrightarrow{OA_M}$，B 变为 B'，所以经过平移 $\overrightarrow{OB}$，A_M 变为 B'，而 B_M 经过平移 $\overrightarrow{OB}$ 变为 B_N，所以 $A_MB' \perp\!\!\!\!= OB \perp\!\!\!\!= B_MB_N$，即四边形 $A_MB_MB_NB'$ 是平行四边形，$A_MB_M \perp\!\!\!\!= B'B_N$．

因为 $C'C_N \parallel B'B_N$，$C'C_N \leqslant B'B_N$，所以 $C'C_N \parallel A_M B_M$，并且 $C'C_N \leqslant A_M B_M$，在线段 $A_M B_M$ 上存在一点 C_M，满足 $A_M C_M \perp\!\!\!\!= C'C_N$，从而 $C_M C_N \perp\!\!\!\!= A_M C'$。

因为经过平移 A_M，C 变为 C'。所以经过平移 $\overrightarrow{OC}$，A_M 变为 C'，这时由于 $C_M C_N \perp\!\!\!\!= A_M C'$，$C_M$ 变为 C_N。

因为 M 是凸集，A_M、$B_M \in M$，所以 $C_M \in M$。同理 $C_N \in N$。因此，点集 M 经过平移 $\overrightarrow{OC}$ 后与点集 N 有公共点 C_N。证毕。

统一书号：7150·2937
定　　价：　0.32 元